JUMP Math 8.2

Libro 8 Parte 2 de 2

Índice

jump math™

MULTIPLYING POTENTIAL.

UpSocial
www.upsocial.org
www.jumpmath.cl

Autor: Dr. Sindi Sabourin
Editores: Megan Burns, Liane Tsui, Natalie Francis, Janice Dyer, Wendy Scavuzzo, Joe Zingrone
Maquetación e ilustración: Linh Lam, Gabriella Kerr, Marijke Friesen, Pam Lostracco
Diseño de la portada: Blakeley Words+Pictures
Fotografía de la portada: © Gary Blakeley, Blakeley Words+Pictures

Primera edición en español: septiembre de 2016.

Publicado por UpSocial bajo acuerdo de licencia con JUMP Math (www.jumpmath.org).
Publicado originalmente por JUMP Math en inglés en Estados Unidos en 2015 bajo el título
JUMP Math Assessment & Practice Book 7.1 (ISBN 978-1-927457-47-4).

Traducción, corrección y revisión: L'Apòstrof, SCCL (Alícia Almonacid, Núria Dordal, Iris Osorio, Àfrica Rubiés, Núria Vila)

Re- edición general: Paula Torres Ahumada

Impresión: Salesianos Impresores S. A.

ISBN: 978-84-945498-6-1
Depósito legal: B 14760-2016

Impreso en Santiago, Chile, 2021.

Nota para educadores, familias y todos los que piensen que las matemáticas son tan importantes como las lenguas para el pleno funcionamiento de la sociedad.

Bienvenido a JUMP Math

Entrar en el mundo de JUMP Math significa creer que todos los niños y niñas tienen habilidades para la aritmética y para disfrutar de las matemáticas. El fundador y matemático John Mighton ha utilizado esta premisa para desarrollar este método innovador. Los recursos del programa aíslan y describen los conceptos de una manera tan clara y gradual que cualquiera puede entenderlos.

El programa JUMP Math consta de guías para los docentes (el núcleo del programa), lecciones interactivas para pizarras electrónicas, libros de práctica y evaluación para los alumnos, materiales de evaluación, programas de divulgación y formación para docentes. Para más información, visiten la web de JUMP Math: **www.jumpmath.es**

Los educadores de los centros que implantan JUMP Math tienen acceso a las guías para docentes en nuestra web. Recomendamos que lean la introducción antes de utilizar estos recursos para poder entender la filosofía y la metodología de JUMP Math. Los libros de práctica y evaluación están pensados para que los alumnos los usen con la ayuda de adultos. Cada estudiante tiene unas necesidades únicas y es importante darle apoyo y animarlo a medida que trabaja el material.

Siempre que sea posible, dejen que los alumnos descubran los conceptos por sí mismos. En el ámbito de las matemáticas, los descubrimientos se pueden realizar de manera progresiva. Descubrir un paso nuevo es como encajar piezas de un rompecabezas: emocionante y gratificante.

Los ejercicios marcados con el dibujo deben realizarse en un cuaderno. Es necesario que los alumnos dispongan de papel cuadriculado para resolver los ejercicios extras o por si necesitan espacio adicional para realizar cálculos.

Índice

PARTE 1

Unidad 1: Expresiones y ecuaciones: operaciones con números racionales

Unidad 2: Expresiones y ecuaciones: potencias y exponentes

Unidad 3: Geometría: congruencia y propiedades de los ángulos

Unidad 7: Estadística y probabilidad: diagramas de dispersión

PARTE 2

Unidad 1: Funciones: relaciones lineales con funciones

Unidad 2: Geometría: transformaciones

Unidad 3: El sistema numérico: números reales

Unidad 4: Geometría: teorema de Pitágoras

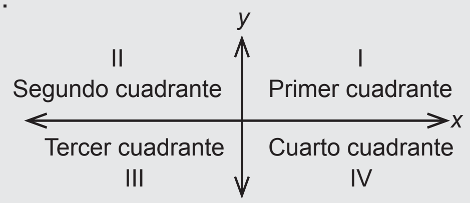
Unidad 5: Expresiones y ecuaciones: sistemas de ecuaciones lineales

Unidad 6: Geometría: volumen

Unidad 7: Estadística y probabilidad: recta de regresión y tablas de doble entrada

F8-13 Plano de coordenadas: los cuatro cuadrantes

Los dos ejes de un sistema de coordenadas se pueden alargar para incluir los números negativos. Los ejes dividen el sistema de coordenadas en cuatro **cuadrantes**. Para numerarlos, se usan **números romanos**: 1 = I, 2 = II, 3 = III, 4 = IV.



1. a) Indica el origen (*O*) y los ejes *x* e *y*.

b) Numera los dos ejes con enteros positivos y negativos. Cuenta de 1 en 1.

c) Numera los cuatro cuadrantes (usando I, II, III, IV).

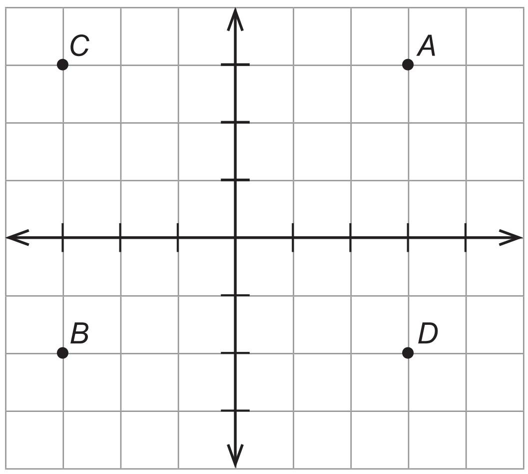
d) ¿En qué cuadrantes están estos puntos?

A (3, 3) ___*I*___ *B* (– 3, – 2) ______

C (– 3, 3) ______ *D* (3, – 2) ______

Extra ▶ Las coordenadas del punto *E* son (– 154, – 238).

¿En qué cuadrante está? ______



2. En la figura 1, el punto *A* (2, 3) está en el primer cuadrante. Sus coordenadas *x* e *y* son positivas.

a) Encuentra las coordenadas de estos puntos.

P (,) *Q* (,)

R (,) *S* (,)

b) Representa los siguientes puntos.

B (3, 2) *C* (1, 4) *D* (4, 1)

3. En la figura 1, el punto *F* (– 2, 3) está en el segundo cuadrante. Su coordenada *x* es negativa y su coordenada *y* es positiva.

a) Encuentra las coordenadas de los siguientes puntos.

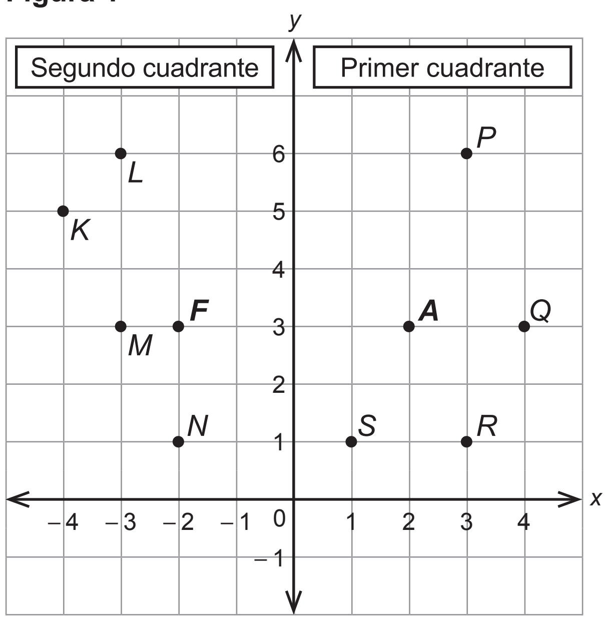
K (,) *L* (,)

M (,) *N* (,)

b) Representa los siguientes puntos.

G (– 3, 2) *H* (– 1, 6) *I* (– 4, 1)

Figura 1



4. En la figura 2, el punto *A* (– 2, – 3) está en el tercer cuadrante. Sus coordenadas *x* e *y* son negativas.

a) Encuentra las coordenadas de los siguientes puntos.

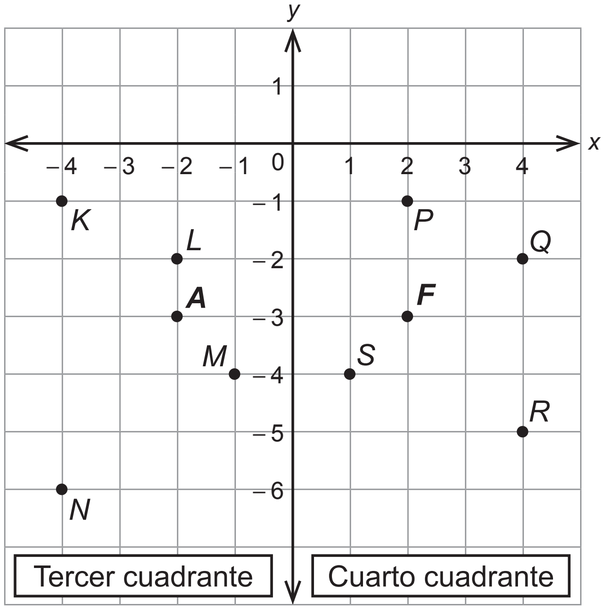
K (,   )   *L* (,   )

M (,   )   *N* (,   )

b) Representa los siguientes puntos.

B (– 3, – 4)   *C* (– 2, – 6)   *D* (– 4, – 3)

Figura 2



5. En la figura 2, el punto *F* (2, – 3) está en el cuarto cuadrante. Su coordenada *x* es positiva y su coordenada *y* es negativa.

a) Encuentra las coordenadas de los siguientes puntos.

P (,   )   *Q* (,   )

R (,   )   *S* (,   )

b) Representa los siguientes puntos.

G (3, – 4)   *H* (1, – 6)

I (4, – 1)   *J* (1, – 2)

6. En la figura 3, los puntos *B* (2, 0) y *C* (– 4, 0) están en el eje *x*. La coordenada *y* de cualquier punto situado en el eje *x* es cero.

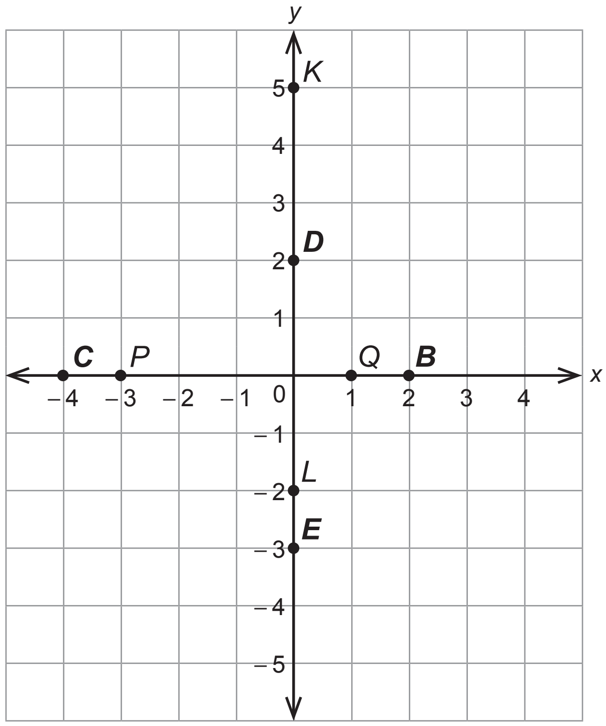
a) Encuentra las coordenadas de los siguientes puntos.

P (,   )   *Q* (,   )

b) Representa y marca los siguientes puntos.

A (4, 0)   *M* (– 2, 0)

Figura 3



7. En la figura 3, los puntos *D* (0, 2) y *E* (0, – 3) están en el eje *y*. La coordenada *x* de cualquier punto situado en el eje *y* es cero.

a) Representa y marca los siguientes puntos.

G (0, 4)   *H* (0, – 1)

b) Encuentra las coordenadas de los siguientes puntos.

K (,   )   *L* (,   )

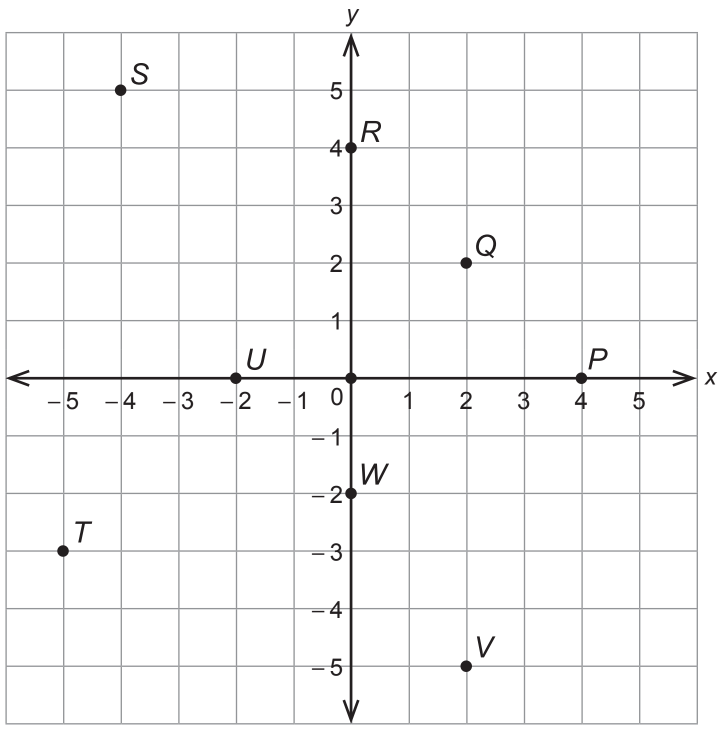
8. a) Encuentra las coordenadas de los siguientes puntos.

P (,) *Q* (,)

R (,) *S* (,)

T (,) *U* (,)

V (,) *W* (,)



b) Representa los siguientes puntos.

A (3, 4) *B* (5, −2)

C (−3, −2) *D* (−4, 1)

E (3, 0) *F* (0, 2)

G (0, −3) *H* (−5, 0)

c) Representa los siguientes puntos.
Pista: Usa una regla para situar los decimales y las fracciones.

I (4,5; 2,5) $J\left(-2\frac{1}{2};\ 3\frac{1}{2}\right)$

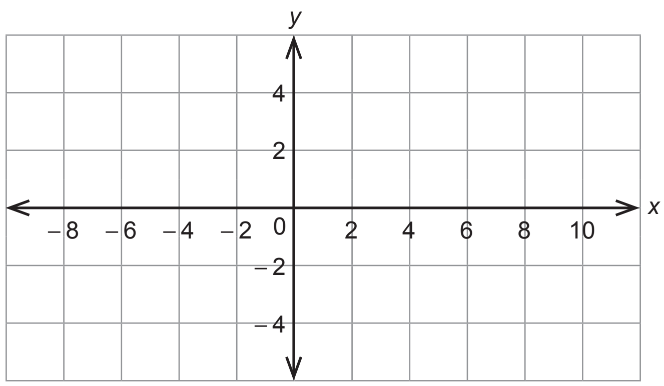
$K\left(-3{,}5;-\ 4\frac{1}{4}\right)$ $L\left(3\frac{1}{3};\ -\ 3\frac{2}{3}\right)$

9. a) Representa los conjuntos de puntos.

i) (6, −4), (6, −2), (6, 0), (6, 1), (6, 3)

ii) (−3, −4), (−3, −2), (−3, 0), (−3, 2)

iii) (−6, 5), (−3, 5), (0, 5), (5, 5)



b) Traza una recta que una los puntos de cada conjunto del ejercicio *a*). Etiqueta las rectas.

c) Completa la tabla para cada conjunto de puntos y su correspondiente recta.

	i)	**ii)**	**iii)**
¿A qué eje es paralela la recta?			
¿Qué coordenada cambia?			
¿Qué coordenada se mantiene igual?			
Escribe las coordenadas de otro punto de la recta situado fuera de la cuadrícula.			
Extra ▶ Escribe la ecuación de la recta.	$x = 6$		

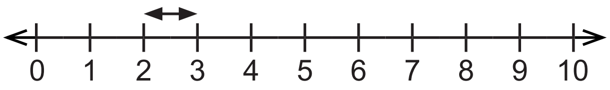
F8-14 Distancia entre puntos en una recta vertical u horizontal

RECUERDA: Al restar enteros, $2 - 3 = 2 + (-3)$ y $2 - (-3) = 2 + (+3)$.

1. Calcula las dos restas. Después, rodea con un círculo la resta que indica las unidades que separan un entero de otro en la recta numérica.

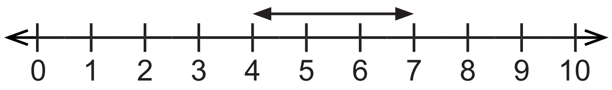
a) $3 - 2 =$ <u>*1*</u>

$2 - 3 =$ <u>*– 1*</u>



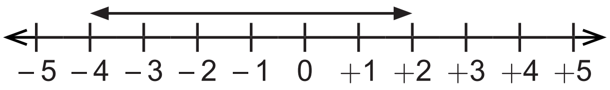
b) $7 - 4 =$ ______

$4 - 7 =$ ______



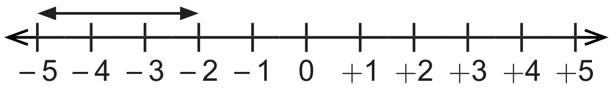
c) $(+2) - (-4) =$ ______

$(-4) - (+2) =$ ______



d) $(-2) - (-5) =$ ______

$(-5) - (-2) =$ ______



2. ¿Qué resta indica la distancia entre -3 y $+5$, $(+5) - (-3)$ o $(-3) - (+5)$?

¿Por qué? ____

Una distancia siempre es positiva. El **valor absoluto** de un número es la distancia que lo separa del cero.
$|-3|$ es la forma abreviada de *valor absoluto de – 3*. Ejemplos: $|-3| = 3$ y $|+3| = 3$

3. Indica el valor absoluto.

a) $|-2| =$　　b) $|+4| =$　　c) $|-25| =$　　d) $|0| =$

e) $\left|-\frac{3}{4}\right| =$　　f) $\left|+2\frac{1}{7}\right| =$　　g) $|+2{,}76| =$　　h) $|-0{,}6| =$

La distancia entre dos enteros es el valor absoluto de su diferencia. Ejemplos:
4 y 7 están separados $|4 - 7| =$
$= |-3| = 3$ unidades.
2 y (-4) están separados $|-4 - 2| =$
$= |-6| = 6$ unidades.

4. Resta. Después, usa el valor absoluto para encontrar la distancia.

a) $|(-6) - (+3)| = |$ <u>*– 9*</u> $| =$ <u>*9*</u>,
así, -6 y $+3$ están separados <u>*9*</u> unidades.

b) $|(-4) - (-1)| = |$______$| =$ ______,
así, -4 y -1 están separados ____ unidades.

c) $|(+16) - (-5)| = |$______$| =$ ______,
así, $+16$ y -5 están separados ____ unidades.

d) $|35 - 200| = |$______$| =$ ______,
así, 35 y 200 están separados ____ unidades.

5. Observa la figura 1 y encuentra la distancia entre los puntos.

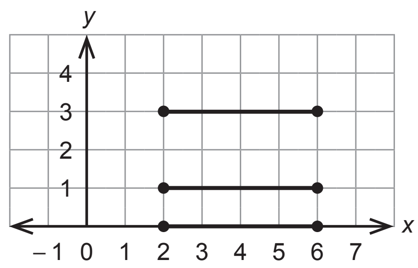
a) La distancia entre (2, 0) y (6, 0) es ______ unidades.

b) La distancia entre (2, 1) y (6, 1) es ______ unidades.

c) La distancia entre (2, 3) y (6, 3) es ______ unidades.

d) La distancia entre (2, *y*) y (6, *y*) es ______ unidades.

Figura 1



6. Observa la figura 2 y encuentra la distancia entre los puntos.

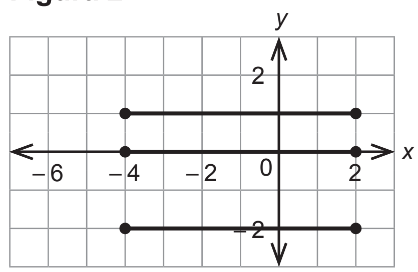
a) La distancia entre (– 4, 0) y (2, 0) es ______ unidades.

b) La distancia entre (– 4, 1) y (2, 1) es ______ unidades.

c) La distancia entre (– 4, – 2) y (2, – 2) es ______ unidades.

d) La distancia entre (– 4, *y*) y (2, *y*) es ______ unidades.

Figura 2



7. Fíjate en las respuestas de los ejercicios 5 y 6. ¿La distancia entre dos puntos situados en la misma recta horizontal depende de la coordenada *x* o de la coordenada *y*?

____

Los puntos con la misma coordenada *x* pertenecen a la misma recta vertical.
Los puntos con la misma coordenada *y* pertenecen a la recta horizontal.

8. Resta las coordenadas *x* y usa el valor absoluto para encontrar la distancia entre los puntos.

a) (– 3, 0) y (1, 0) ______ unidades

b) (5, 0) y (– 2, 0) ______ unidades

c) (– 1, – 10) y (1,– 10) ______ unidades

d) (– 8, 6) y (– 2, 6) ______ unidades

9. Observa la figura 3 y encuentra la distancia entre los puntos.

a) (0, – 2) y (0, 5)

______ unidades

b) (1, – 2) y (1, 5)

______ unidades

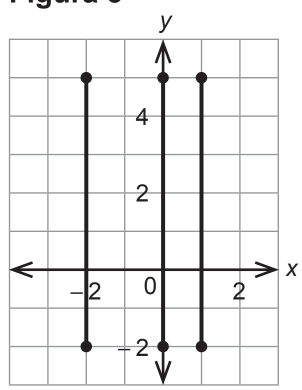
c) (– 2, – 2) y (– 2, 5)

______ unidades

d) (*x*, – 2) y (*x*, 5)

______ unidades

Figura 3



10. Resta las coordenadas *y* y usa el valor absoluto para encontrar la distancia entre los puntos.

a) (1, – 3) y (1, 2) ______ unidades

b) (1, – 5) y (1, 2) ______ unidades

c) (– 1, – 2) y (– 1, 2) ______ unidades

d) (– 1, – 5) y (– 1, – 2) ______ unidades

e) (184, – 2) y (184, 7) ______ unidades

f) (– 51, 2) y (– 51, – 5) ______ unidades

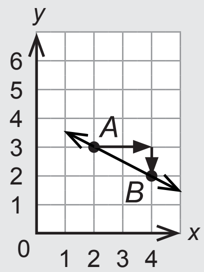
F8-15 Encontrar gráficamente la intersección con el eje *y*

Recuerda que para encontrar la ratio de variación media de una recta, calculamos la pendiente entre dos puntos cualesquiera de la recta, *A* y *B*.

Paso 1: Escogemos dos puntos. Si es posible, usamos coordenadas enteras.

Paso 2: Denominamos *A* al punto de la izquierda y encontramos la pendiente de *A* a *B* para que el desplazamiento horizontal sea positivo.

Ejemplo: *A* (2, 3) y *B* (4, 2)



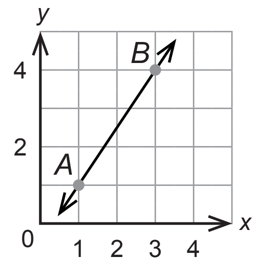
desplaz. $x = 4 - 2 = +2$

desplaz. $y = 2 - 3 = -1$

$$\text{pendiente} = \frac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \frac{-1}{+2} = -\frac{1}{2}$$

1. Marca dos puntos *A* y *B* en la recta y después calcula la pendiente (*m*). Denomina *A* al punto de la izquierda. Pista: Si es posible, usa coordenadas enteras.

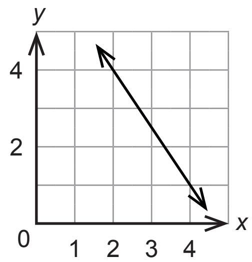
a)



desplaz.: $x =$ ___ ; $y =$ ___

$m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} =$ ___

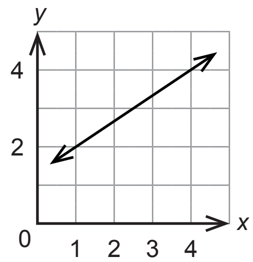
b)



desplaz.: $x =$ ___ ; $y =$ ___

$m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} =$ ___

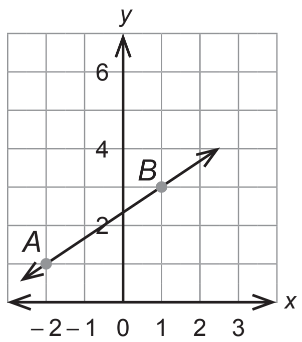
c)



desplaz.: $x =$ ___ ; $y =$ ___

$m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} =$ ___

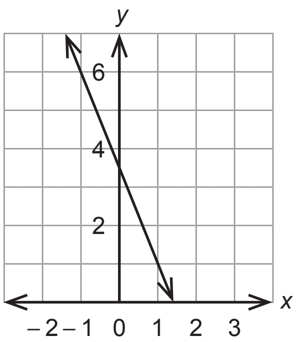
d)



desplaz.: $x =$ ___ ; $y =$ ___

$m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} =$ ___

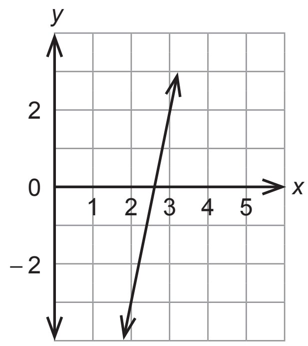
e)



desplaz.: $x =$ ___ ; $y =$ ___

$m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} =$ ___

f)



desplaz.: $x =$ ___ ; $y =$ ___

$m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} =$ ___

En una gráfica, una recta que va de la parte inferior izquierda a la parte superior derecha representa una función creciente. En una gráfica, una recta que va de la parte superior izquierda a la parte inferior derecha representa una función decreciente.

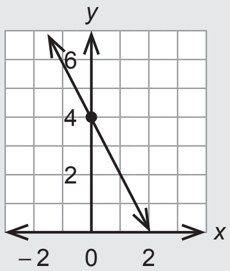
2. a) ¿Qué funciones lineales del ejercicio 1 son crecientes?

b) ¿Qué funciones lineales del ejercicio 1 tienen pendiente positiva?

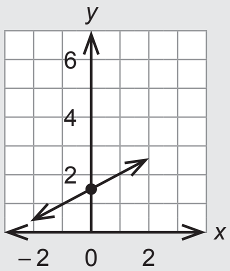
c) ¿Cómo puedes deducir, a partir de la pendiente, si una recta es creciente o decreciente?

La **intersección con el eje *y*** es el punto donde una recta corta el eje *y*.

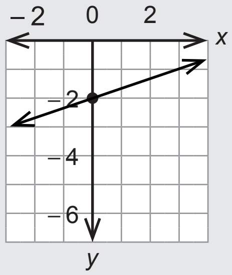
Ejemplos:



La int. con el eje *y* es 4.



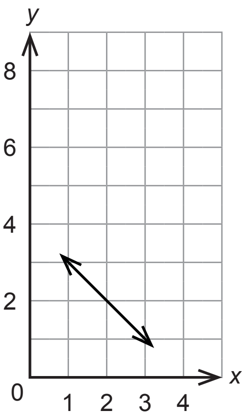
La int. con el eje *y* es 1,5.



La int. con el eje *y* es – 2.

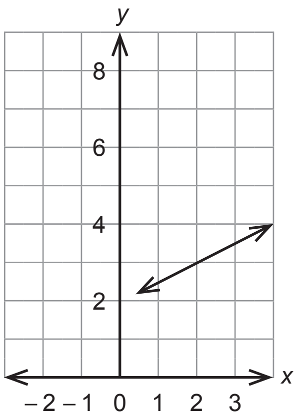
3. a) Alarga cada recta para encontrar la intersección con el eje *y*. Marca la intersección.

i)



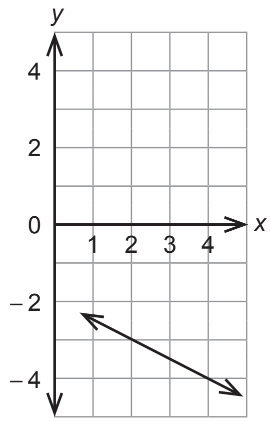
int. con el eje *y*: ______

ii)



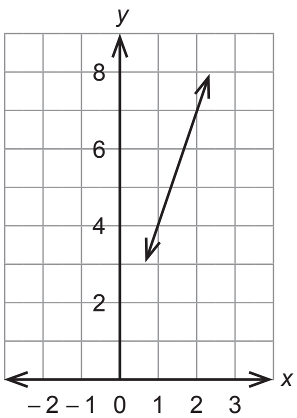
int. con el eje *y*: ______

iii)



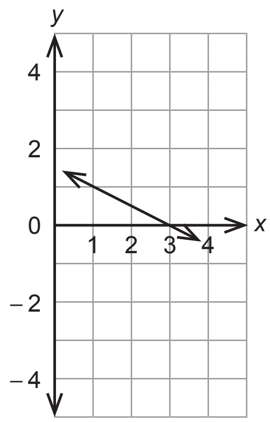
int. con el eje *y*: ______

iv)



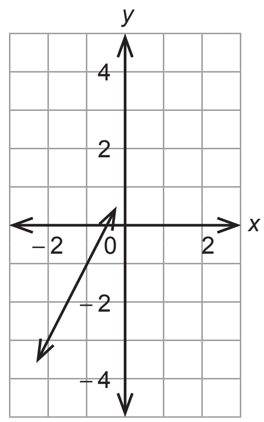
int. con el eje *y*: ______

v)



int. con el eje *y*: ______

vi)



int. con el eje *y*: ______

b) Encuentra la pendiente (m) de las rectas de *a*) usando dos puntos con coordenadas enteras. Resuelve *iv*), *v*) y *vi*) en tu cuaderno. Para *vi*), encuentra dos puntos cuyas coordenadas *x* sean enteros.

i) desplaz. $x =$ ______

desplaz. $y =$ ______

$m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} =$ ___

ii) desplaz. $x =$ ______

desplaz. $y =$ ______

$m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} =$ ___

iii) desplaz. $x =$ ______

desplaz. $y =$ ______

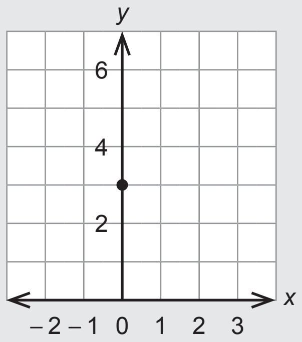
$m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} =$ ___

c) ¿Observas alguna relación entre la pendiente de una recta y su intersección con el eje *y*? ______

Para trazar una recta con intersección con el eje $y = 3$ y pendiente $(m) = \dfrac{-1}{2}$:

Paso 1

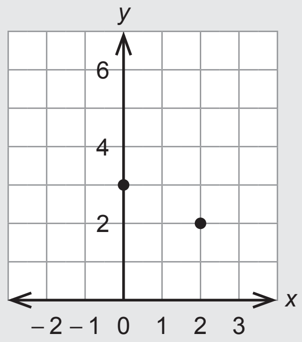
Indicamos el punto de corte en el eje y. Intersección con el eje $y = 3$



Paso 2

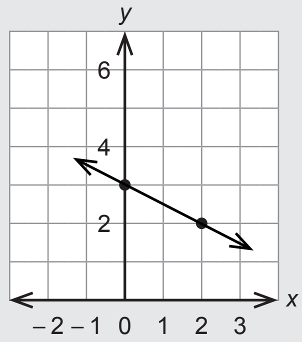
pendiente $(m) = \dfrac{\text{desplaz.}y}{\text{desplaz.}x} = \dfrac{-1}{2}$

Para marcar el segundo punto, desde la intersección con el eje y, contamos 2 unidades hacia la derecha (para el desplaz. $x + 2$) y 1 unidad hacia abajo (para el desplaz. $y - 1$).



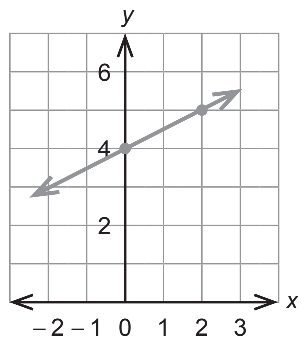
Paso 3

Unimos los puntos con una recta y alargamos la recta.



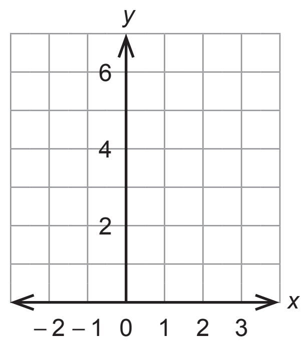
4. Indica la intersección con el eje y. Después, traza una recta con la pendiente (m) y la intersección con el eje y indicadas.

a)



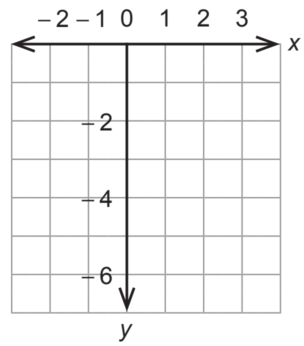
int. con $y = 4$, $m = \dfrac{1}{2}$

b)



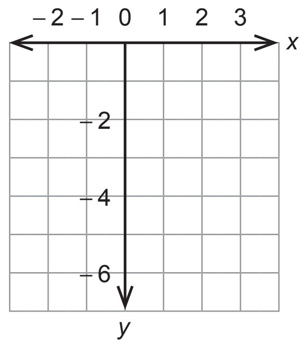
int. con $y = 3$, $m = \dfrac{-1}{3}$

c)



int. con $y = -3$, $m = \dfrac{-1}{2}$

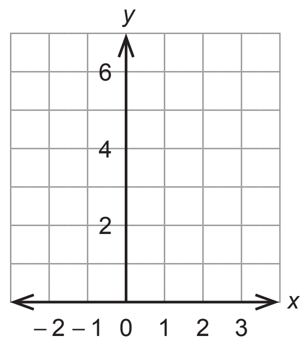
d)



int. con $y = -3$, $m = 2$

Pista: Expresa la pendiente como $\dfrac{2}{1}$.

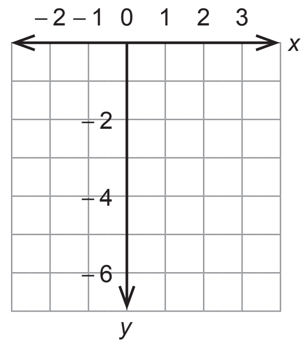
e)



int. con $y = 5$, $m = -2$

Pista: Expresa la pendiente como $\dfrac{-2}{1}$.

f)



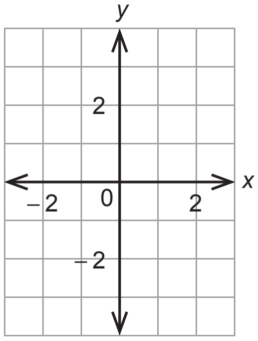
int. con $y = m = -2$

F8-16 Encontrar algebraicamente la intersección con el eje *y*

1. a) Completa la tabla usando la ecuación y después, representa la recta. Alarga la recta para encontrar la intersección con el eje *y*.

i) $y = 2x - 1$

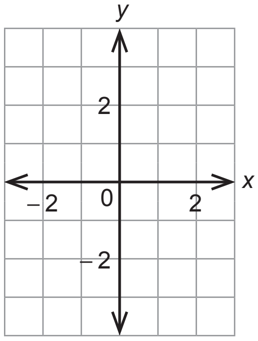
x	y
1	*1*
2	*3*



int. con el eje *y*: ______

ii) $y = -1{,}5x + 2$

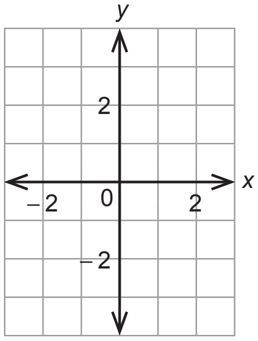
x	y
1	
2	



int. con el eje *y*: ______

iii) $y = -x - 0{,}5$

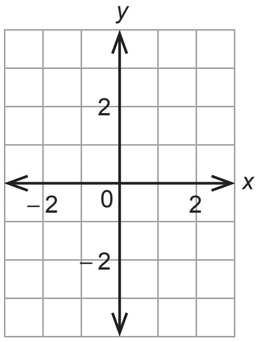
x	y
1	
2	



int. con el eje *y*: ______

iv) $y = \frac{1}{2}x - 3$

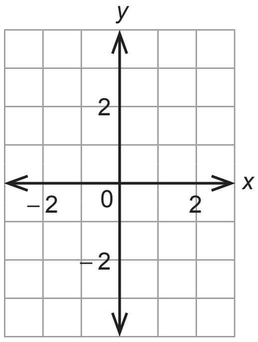
x	y
1	$-\frac{5}{2} = -2{,}5$
2	



int. con el eje *y*: ______

v) $y = -2x + \frac{1}{2}$

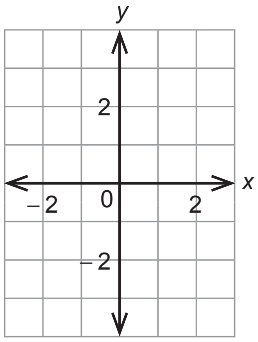
x	y
1	
2	



int. con el eje *y*: ______

vi) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

x	y
1	
2	



int. con el eje *y*: ______

b) Rodea con un círculo la intersección con el eje *y* en las ecuaciones del ejercicio *a*). Recuerda incluir el signo.

2. a) Completa la tabla usando la ecuación.

i) $y = 2x + 3$

x	y
−1	*1*
0	*3*
1	

ii) $y = 1{,}5x + 4$

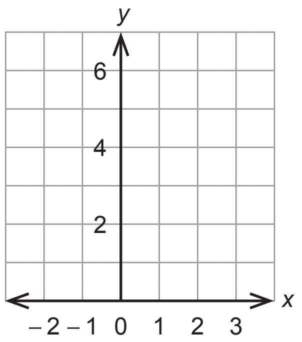
x	y
−2	
0	
1	

iii) $y = -2x - 3$

x	y
−1	
0	
2	

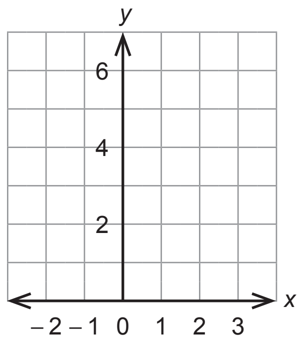
b) Representa las rectas de las ecuaciones del ejercicio *a*) e indica la intersección con el eje *y*.

i)



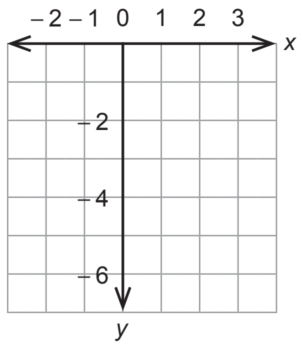
int. con el eje *y*: ______

ii)



int. con el eje *y*: ______

iii)



int. con el eje *y*: ______

c) En la tabla, ¿dónde se observa la intersección con el eje *y*? ____________________________

3. Encuentra el valor de *y* para $x = 0$.

a) $y = 3x - 1 =$

$= 3(0) - 1 = -1$

b) $y = -0{,}5x + 2 =$

$=$

c) $y = 2x =$

$=$

d) $y = -2x =$

$=$

e) $y = 1{,}5x - 2 =$

$=$

f) $y = -2{,}5x + 1 =$

$=$

4. Construye una tabla para cada función del ejercicio 3.

a) $y = 3x - 1$

x	y
1	
2	

b) $y = -0{,}5x + 2$

x	y
1	
2	

c) $y = 2x$

x	y
1	
2	

d) $y = -2x$

e) $y = 1{,}5x - 2$

f) $y = -2{,}5x + 1$

5. a) ¿En qué funciones del ejercicio 4 la recta representada en la gráfica pasa por (0, 0)? ____________

b) En las rectas que pasan por (0, 0) en el ejercicio 4, la intersección con el eje *y* es ______.

6. En las ecuaciones del ejercicio 1 *a*), sustituye *x* por 0 para encontrar *y*. Si no obtienes la intersección con el eje *y*, encuentra tu error.

i) $y = 2x - 1 =$
$= 2(0) - 1 = -1$ ✓

ii) $y = -1{,}5x + 2$

iii) $y = -x - 0{,}5$

iv) $y = \frac{1}{2}x - 3$

v) $y = -2x + \frac{1}{2}$

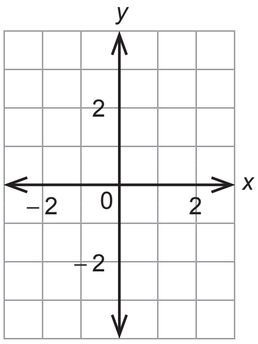
vi) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

Para encontrar la intersección con el eje *y* a partir de la ecuación de una recta, sustituimos *x* por 0 y encontramos *y*.

7. a) Completa la tabla usando la ecuación y después, representa la recta. Alarga la recta para encontrar la intersección con el eje *y*.

i) $y = 2x$

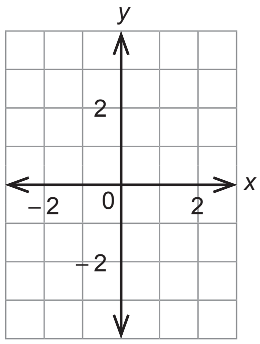
x	*y*
1	2
2	4



int. con el eje *y*: ______

ii) $y = 1{,}5x$

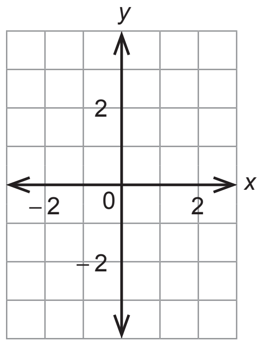
x	*y*
1	
2	



int. con el eje *y*: ______

iii) $y = -x$

x	*y*
1	
2	



int. con el eje *y*: ______

b) Rodea con un círculo las gráficas que pasan por el origen (0, 0).

Recuerda que las rectas que pasan por el origen representan una relación proporcional entre *x* e *y*. La intersección con el eje *y* de las rectas que pasan por el origen es 0.

8. Rodea con un círculo las tablas del ejercicio 7 que representan una relación proporcional entre *x* e *y*.

9. Rodea con un círculo las ecuaciones que representan una relación proporcional.

A. $y = 3x - 2$

B. $y = 2{,}5x$

C. $y = -3x$

D. $y = \frac{1}{2}x$

E. $y = -1{,}5x + \frac{1}{2}$

F. $y = -\frac{3}{2}x$

F8-17 Encontrar la intersección con el eje *y* a partir de una tabla

1. a) Usa los desplazamientos horizontal y vertical para completar las tablas. Recuerda que la variación en *x* es el desplazamiento horizontal y la variación en *y* es el desplazamiento vertical.

i)

	x	*y*	
	1	3	
+1	*2*	*5*	+2
+1			+2
+1			+2

ii)

	x	*y*	
	−1	2	
+2	*1*	*7*	+5
+2			+5
+2			+5

iii)

	x	*y*	
	5	10	
+3			−4
+3			−4
+3			−4

b) Encuentra la pendiente para cada tabla de *a*) calculando el desplazamiento vertical partido por el desplazamiento horizontal.

i) $m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{2}{1} = 2$ ii) $m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{\quad}{\quad} =$ iii) $m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{\quad}{\quad} =$

2. a) Encuentra los desplazamientos horizontal y vertical. Después, encuentra la pendiente.

i)

	x	*y*	
	1	4	
+1	2	7	*+3*
+1	3	10	*+3*

ii)

	x	*y*	
	−3	−4	
	−1	0	
	1	4	

iii)

	x	*y*	
	0	−1	
	3	1	
	6	3	

$m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{3}{1} = 3$ $m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{\quad}{\quad} =$ $m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{\quad}{\quad} =$

b) Continúa con las tablas de *a*). Multiplica *x* por la pendiente. ¿Qué hay que sumar o restar a cada número de la segunda columna para obtener *y*?

i)

x	pendiente × *x*	*y*
1	*3 × 1 = 3*	4
2	*3 × 2 = 6*	7
3		10

Sumar *1*

ii)

x	pendiente × *x*	*y*
−3		−4
−1		0
1		4

Sumar ______

iii)

x	pendiente × *x*	*y*
0		−1
3		1
6		3

Restar ______

c) Formula una ecuación para cada tabla de *b*).

i) *y = 3x + 1* ii) *y =* iii) *y =*

d) Rodea con un círculo la intersección con el eje *y* de las ecuaciones de *c*).

Para formular la ecuación de una recta y encontrar su intersección con el eje *y* a partir de una tabla:

Paso 1: Encontramos los desplazamientos horizontal y vertical y la pendiente.

x	**pendiente × x**	y
1		2
3		8
5		14

$+2$, $+2$; $+6$, $+6$

pendiente $= \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{6}{2} = 3$

Paso 2: Multiplicamos cada *x* por la pendiente.

x	**pendiente × x**	y
1	3	2
3	9	8
5	15	14

Paso 3: ¿Qué hay que sumar (o restar) a cada número de la segunda columna para obtener *y*?

x	**pendiente × x**	y
1	3	2
3	9	8
5	15	14

Restar 1

Paso 4: Formulamos la ecuación correspondiente a la tabla. Sustituimos *x* por 0 para encontrar la intersección con el eje *y*.

$y = 3x - 1$

int. con el eje $y = 3(0) - 1 = -1$

3. Encontrar la pendiente para completar las tablas y formular las ecuaciones. Rodea con un círculo la intersección con el eje *y.*

a)

x	**pendiente × x**	y
1	*− 2*	1
2	*− 4*	− 1
3	*− 6*	− 3

+1, *+1* ; *− 2*, *− 2*

+ 3

pendiente $= \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{-2}{1} = -2$

ecuación: *$y = -2x + 3$*

b)

x	**pendiente × x**	y
1		2
2		3
3		4

pendiente $= \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{\quad}{\quad} =$

ecuación: ____________________

c)

x	**pendiente × x**	y
1		3
4		9
7		15

pendiente $= \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{\quad}{\quad} =$

ecuación: ____________________

d)

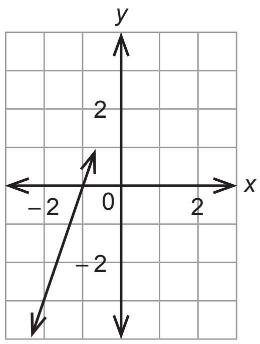
x	**pendiente × x**	y
− 1		0
1		− 2
3		− 4

pendiente $= \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{\quad}{\quad} =$

ecuación: ____________________

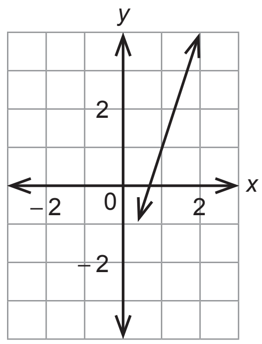
4. a) Alarga la recta para encontrar la intersección con el eje *y*.

A.



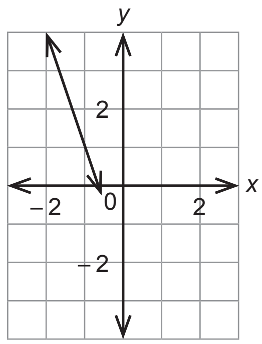
int. con el eje *y*: ______

B.



int. con el eje *y*: ______

C.



int. con el eje *y*: ______

b) Relaciona las gráficas con las siguientes ecuaciones.

i) $y = 3x - 2$ ______ ii) $y = -3x - 2$ ______ iii) $y = 3x + 3$ ______

5. a) Relaciona las tablas con la ecuación correspondiente.

A.

x	***y***
−1	5
0	3
1	1

B.

x	***y***
−1	1
1	5
2	7

C.

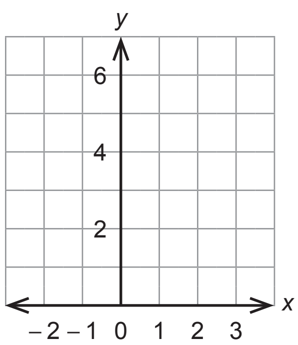
x	***y***
−2	−7
−1	−5
1	−1

i) $y = 2x - 3$ ______ ii) $y = 2x + 3$ ______ iii) $y = -2x + 3$ ______

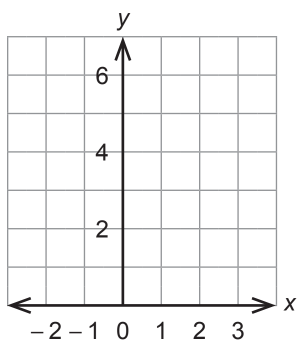
b) Rodea la intersección con el eje *y* en cada ecuación.

c) Representa gráficamente las tablas del ejercicio *a*), escribe la ecuación y marca la intersección con el eje y para comprobar las respuestas de *b*).

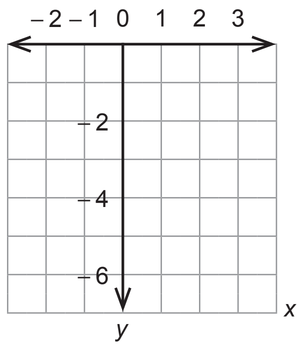
A. ____________________



B. ____________________



C. ____________________



6. a) Completa las cinco ecuaciones diferentes con los valores que quieras.

$y = 2x +$ ______ $y = 2x -$ ______ $y = 3x +$ ______ $y = 3x -$ ______ $y = 2x +$ ______

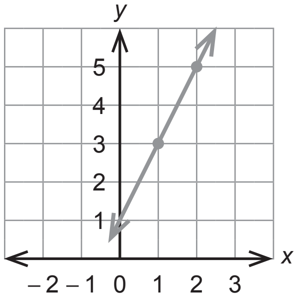
b) Representa gráficamente las cinco ecuaciones en papel cuadriculado y en orden aleatorio.

c) Pide a un compañero que relacione las ecuaciones con las gráficas.

F8-18 Encontrar la intersección con el eje *y* a partir de pares ordenados

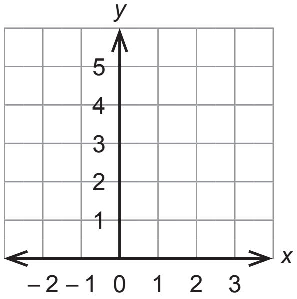
1. a) Representa gráficamente los pares ordenados y únelos para formar una recta. Alarga la recta para encontrar la intersección con el eje *y*.

i) (1, 3), (2, 5)



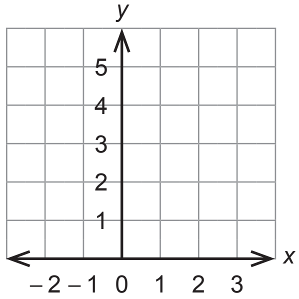
int. con el eje *y*: *1*

ii) (– 2, 4), (– 1, 3)



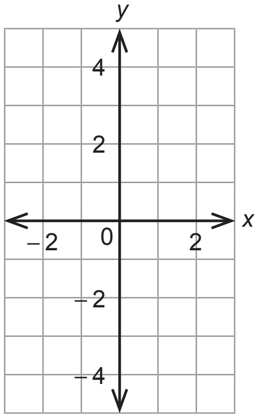
int. con el eje *y*: ______

iii) (1, 2), (3, 6)



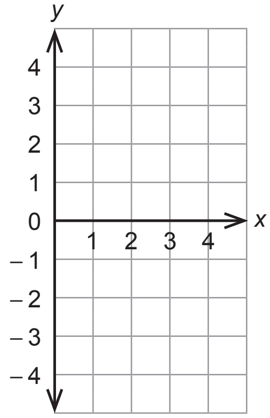
int. con el eje *y*: ______

iv) (– 2, 2), (1, – 4)



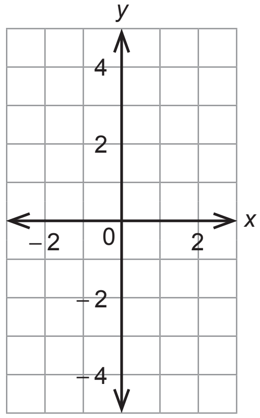
int. con el eje *y*: ______

v) (2, 4), (1, 1)



int. con el eje *y*: ______

vi) (– 1, 3), (1, – 3)



int. con el eje *y*: ______

b) Encuentra la pendiente (*m*) de las rectas de *a*).

i) $m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{2}{1} = 2$ ii) $m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{\quad}{\quad} =$ iii) $m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{\quad}{\quad} =$

iv) $m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{\quad}{\quad} =$ v) $m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{\quad}{\quad} =$ vi) $m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{\quad}{\quad} =$

c) Construye una tabla con las coordenadas de *a*). Usa la pendiente para completar la tabla y formular la ecuación. Rodea la intersección con el eje *y*. Resuelve *iv*), *v*) y *vi*) en tu cuaderno.

i)

x	**pendiente × *x***	***y***
1	*2*	*3*
2	*4*	*5*

$+ 1$

ecuación: $y = 2x + 1$

v)

x	**pendiente × *x***	***y***
– 2		*4*
– 1		*3*

ecuación: ______________

vi)

x	**pendiente × *x***	***y***

ecuación: ______________

Para encontrar la intersección con el eje *y* a partir de los pares ordenados (1, 4), (3, 10), sin representación gráfica:

Paso 1
Anotamos las coordenadas en una tabla y hallamos los desplazamientos horizontal y vertical y la pendiente.

x	pendiente $\times$ x	y
1		4
3		10

$+2$ $\qquad$ $+6$

pendiente $= \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{6}{2} = 3$

Paso 2
Multiplicamos los valores de *x* por la pendiente.

x	pendiente $\times$ x	y
1	3	4
3	9	10

Paso 3
¿Qué hay que sumar (o restar) a la segunda columna para obtener *y*?

x	pendiente $\times$ x	y
1	3	4
3	9	10

Sumar 1

La intersección con el eje *y* es $+1$.

2. Una recta pasa por los puntos indicados. Encuentra la intersección con el eje *y* sin representarla gráficamente.

a) (2, – 1), (3, – 3)

x	pendiente $\times$ x	y
2		– 1
3		– 3

+1 $\qquad$ *– 2*

$m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{-2}{1} = -2$

int. con el eje *y*: ______

b) (1, – 4), (3, 2)

x	pendiente $\times$ x	y
1		– 4
3		2

$m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{\quad}{\quad} =$

int. con el eje *y*: ______

c) (– 2, 1), (1, 7)

x	pendiente $\times$ x	y
– 2		1
1		7

$m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{\quad}{\quad} =$

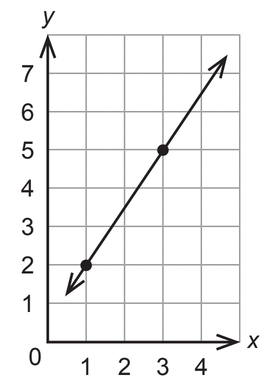
int. con el eje *y*: ______

3. a) A continuación se muestran cuatro funciones lineales representadas de maneras diferentes. Encuentra la intersección con el eje *y* de cada una de ellas.

A.

x	y
– 2	1
– 1	0
1	– 2
2	– 3

B.



C. (– 1, – 2), (1, 2), (2, 4)

D. $y = -3x - 1$

b) ¿En qué función es mayor la intersección con el eje *y*?

c) ¿En qué función es negativa la intersección con el eje *y*?

d) ¿Qué función pasa por el origen?

e) ¿Qué función representa una relación proporcional entre *x* e *y*?

F8-19 Ecuación de la recta en forma pendiente – intersección con el eje *y*

RECUERDA: Podemos encontrar la pendiente de una recta a partir de dos cualesquiera de sus puntos.

1. a) Encuentra la pendiente de la recta $y = 2x + 5$ usando diferentes pares de puntos. Asegúrate de que siempre obtienes la misma pendiente.

x	*y*
0	
1	

$+1$

desplaz. $x =$ ____

desplaz. $y =$ ____

$m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{\quad}{\quad} =$

x	*y*
0	
2	

desplaz. $x =$ ____

desplaz. $y =$ ____

$m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{\quad}{\quad} =$

x	*y*
1	
4	

desplaz. $x =$ ____

desplaz. $y =$ ____

$m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{\quad}{\quad} =$

b) ¿De qué modo resulta más fácil encontrar la pendiente? Usando $x =$ ______ y $x =$ ______.

2. a) Completa las tablas usando la ecuación. Encuentra la pendiente (m) y la intersección con el eje *y*.

i) $y = 3x + 2$

x	*y*
0	2
1	5

int. con el eje *y*: __2__

desplaz. $x = 1$

desplaz. $y =$ __$5 - 2 = 3$__

$m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{3}{1} = 3$

ii) $y = -1{,}5x + 2$

x	*y*
0	
1	

int. con el eje *y*: ______

desplaz. $x = 1$

desplaz. $y =$ ___________

$m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{\quad}{\quad} =$

iii) $y = -x - 0{,}5$

x	*y*
0	
1	

int. con el eje *y*: ______

desplaz. $x = 1$

desplaz. $y =$ ___________

$m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{\quad}{\quad} =$

b) En cada ecuación, rodea la intersección con el eje *y* y subraya la pendiente, signo incluido.

c) ¿Dónde se indica la intersección con el eje *y* en la ecuación? ________________________

d) ¿Dónde se indica la pendiente en la ecuación? ____________________________

3. Encuentra la pendiente (m) y la intersección con el eje *y* de las rectas a partir de su ecuación.

a) $y = 4x - 5$
m: __4__ int. con *y*: __-5__

b) $y = -1{,}5x + 2$
m: ______ int. con *y*: ______

c) $y = -x - 0{,}5$
m: ______ int. con *y*: ______

d) $y = \dfrac{1}{2}x - 3$
m: ______ int. con *y*: ______

e) $y = -2x + \dfrac{1}{2}$
m: ______ int. con *y*: ______

f) $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$
m: ______ int. con *y*: ______

Para formular la ecuación de una recta, multiplicamos x por la pendiente y le sumamos la intersección con el eje y. El resultado lo igualamos a y.

Si m es la pendiente de una recta y b es la intersección con el eje y, la **ecuación explícita** de la recta es $y = mx + b$.

Ejemplos:

Pendiente	**Int. con el eje *y***	**Ecuación de la recta**
2	3	$y = 2x + 3$
1	– 2	$y = x - 2$
– 5	0	$y = -5x$
1,2	0,5	$y = 1,2x + 0,5$

4. Formula la ecuación explícita de una recta con la pendiente y la intersección con el eje y dadas.

a) pendiente $= 3$, int. con el eje $y = -3$

$y = 3x - 3$

b) pendiente $= -3$, int. con el eje $y = 3$

____

c) pendiente $= 1,4$, int. con el eje $y = -1$

____

d) pendiente $= \frac{1}{2}$, int. con el eje $y = -3$

____

e) pendiente $= 2$, int. con el eje $y = -\frac{2}{3}$

____

f) pendiente $= \frac{1}{2}$, int. con el eje $y = \frac{3}{5}$

____

5. Encuentra la pendiente y la intersección con el eje y Formula la ecuación de la recta. Pista: La intersección con el eje y es la coordenada y de un punto cuya coordenada x es igual a 0.

a) $A\ (2, -1)$, $B\ (0, -3)$

int. con el eje y: -3

desplaz. $x = 0 - 2 = -2$

desplaz. $y = -3 - (-1) = -2$

$m = \frac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \frac{-2}{-2} = 1$

ecuación: $y = x - 3$

b) $A\ (0, 2)$, $B\ (1, 3)$

int. con el eje y:

desplaz. $x =$ __ – __ = __

desplaz. $y =$ __ – __ = __

$m = \frac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \frac{\quad}{\quad} =$

ecuación: __________

c) $A\ (-2, -1)$, $B\ (0, -5)$

int. con el eje y:

desplaz. $x =$ __ – __ = __

desplaz. $y =$ __ – __ = __

$m = \frac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \frac{\quad}{\quad} =$

ecuación: __________

d) $A\ (1, -1)$, $B\ (0; 1,5)$

int. con el eje y: $1,5$

desplaz. $x = 0 - 1 = -1$

desplaz. $y = 1,5 - (-1) = 2,5$

$m = \frac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \frac{2,5}{-1} = -2,5$

ecuación: $y = -2,5x + 1,5$

e) $A\ (0, -2,5)$, $B\ (1, -3,5)$

int. con el eje y:

desplaz. $x =$

desplaz. $y =$

$m = \frac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \frac{\quad}{\quad} =$

ecuación: __________

f) $A\ (-1, -1)$, $B\ (0, -0,5)$

int. con el eje y:

desplaz. $x =$

desplaz. $y =$

$m = \frac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \frac{\quad}{\quad} =$

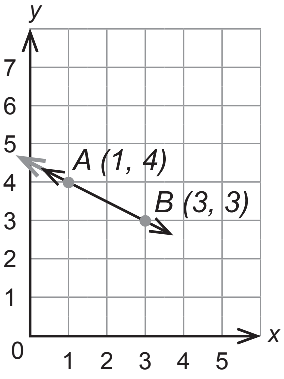
ecuación: __________

6. Comprueba los resultados del ejercicio 5 sustituyendo.

Ejemplo: a) $y = x - 3$, $y = 2 - 3 = -1$, $A\ (2, -1)$ ✓

7. a) Alarga la recta para encontrar la intersección con el eje y. Escoge dos puntos con coordenadas enteras para encontrar la pendiente de la recta. Recuerda marcar el punto de la izquierda como A para obtener un desplazamiento horizontal positivo.

i)



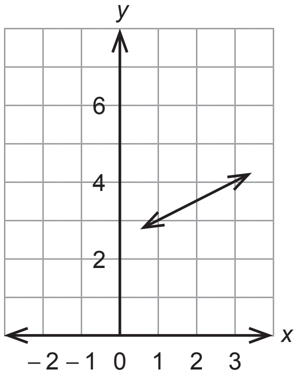
int. con el eje y: *4,5*

desplaz. $x =$ *3 – 1 = 2*

desplaz. $y =$ *3 – 4 = – 1*

$m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{-1}{2} = -0{,}5$

ii)



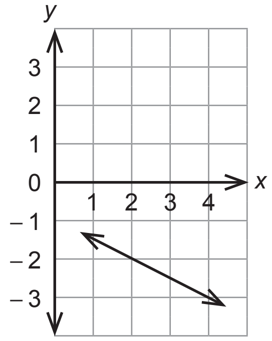
int. con el eje y: ______

desplaz. $x =$ ____________

desplaz. $y =$ ____________

$m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{\quad}{\quad} =$

iii)



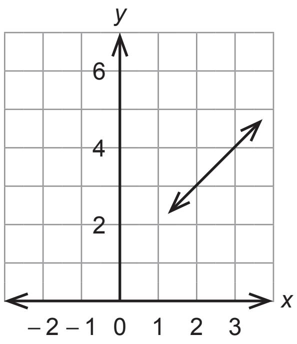
int. con el eje y: ______

desplaz. $x =$ ____________

desplaz. $y =$ ____________

$m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{\quad}{\quad} =$

iv)



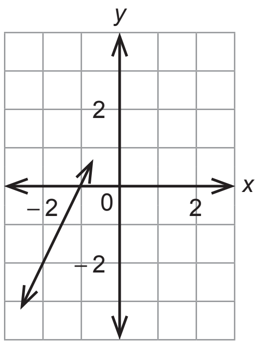
int. con el eje y: ______

desplaz. $x =$ __________

desplaz. $y =$ __________

$m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{\quad}{\quad} =$

v)



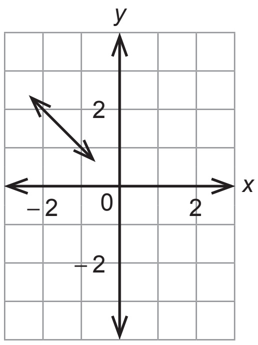
int. con el eje y: ______

desplaz. $x =$ ____________

desplaz. $y =$ ____________

$m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{\quad}{\quad} =$

vi)



int. con el eje y: ______

desplaz. $x =$ ____________

desplaz. $y =$ ____________

$m = \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{\quad}{\quad} =$

b) Formula la ecuación explícita correspondiente a cada recta de a).

i) $y =$ *– 0,5x + 4,5*   ii) $y =$ ____________   iii) $y =$ ____________

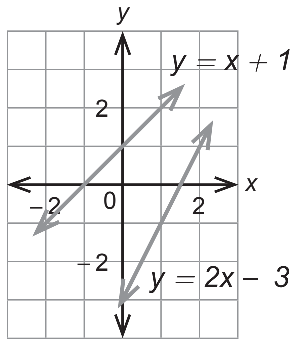
iv) $y =$ ____________   v) $y =$ ____________   vi) $y =$ ____________

c) ¿Qué ecuación representa una relación proporcional entre x e y? ______

F8-20 Comparar funciones lineales

1. a) Representa gráficamente las dos funciones en el mismo sistema de coordenadas. Determina qué función tiene la pendiente mayor y cuál es más pronunciada.

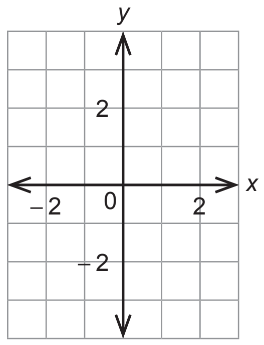
i) $y = x + 1$
$y = 2x - 3$



Mayor pendiente: $y = 2x - 3$

Más pronunciada: $y = 2x - 3$

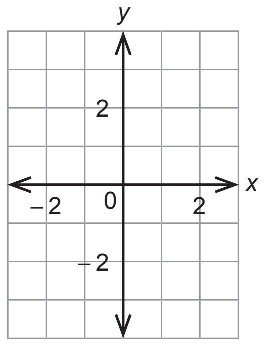
ii) $y = 3x - 1$
$y = x + 2$



Mayor pendiente: ___________

Más pronunciada: ___________

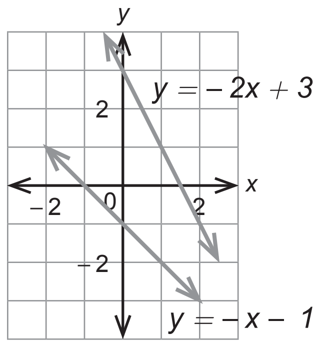
iii) $y = 2x - 1$
$y = x - 2$



Mayor pendiente: __________

Más pronunciada: _________

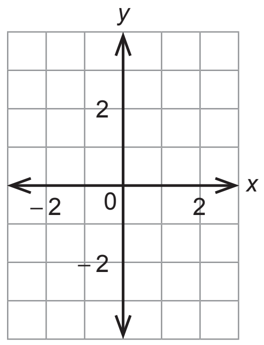
iv) $y = -x - 1$
$y = -2x + 3$



Mayor pendiente: $y = -x - 1$

Más pronunciada: $y = -2x + 3$

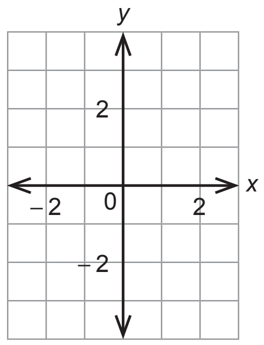
v) $y = -3x + 1$
$y = -2x - 2$



Mayor pendiente: ___________

Más pronunciada: ___________

Extra ▶ $y = x + 1$
$y = -3x + 1$



Mayor pendiente: __________

Más pronunciada: _________

b) ¿Una pendiente mayor implica siempre una pendiente más pronunciada? _______________

c) Encuentra el valor absoluto de las pendientes en cada actividad del ejercicio *a*).

i) $|1| = 1, |2| = 2$

ii)

iii)

iv) $|-1| = 1, |-2| = 2$

v)

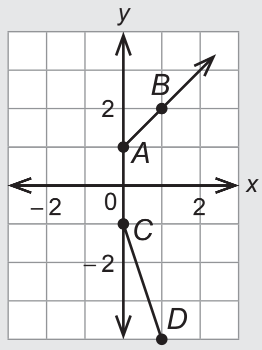
Extra ▶

d) ¿Un valor absoluto mayor implica siempre una pendiente más pronunciada? ______

Una pendiente mayor no siempre implica una pendiente más pronunciada. Para saber cuál es más pronunciada, hay que comparar los valores absolutos de las pendientes.

Ejemplo: La recta *AB* tiene pendiente 1 y la recta *CD*, pendiente – 3; por tanto, *AB* tiene una pendiente mayor que *CD*. Sin embargo, la recta *CD* tiene una pendiente más pronunciada que *AB*.

Pendiente de *AB*: 1 Valor absoluto de la pendiente de *AB*: 1
Pendiente de *CD*: – 3 Valor absoluto de la pendiente de *CD*: 3

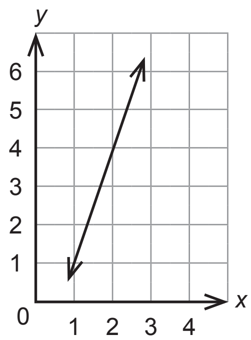


2. a) A continuación se muestran cuatro funciones lineales representadas de maneras diferentes. Encuentra la pendiente de cada una de ellas.

A.

x	*y*
– 1	– 4
1	2
2	5
3	8

B.



C. (– 2, 0), (0, 2), (3, 5)

D. $y = -4x + 3$

b) ¿Qué dos funciones tienen la misma pendiente? ______ y ______

c) ¿Qué función tiene la pendiente mayor? _______________

d) ¿Qué función tiene la pendiente más pronunciada? ______

3. La tabla muestra las temperaturas de la primera semana de diciembre en Santiago, a las 8 a. m. y a las 4 p. m.

	L	**M**	**M**	**J**	**V**	**S**	**D**
Temperatura a las 8 a. m. (°C)	26	21	23	20	28	28	25
Temperatura a las 4 p. m. (°C)	21	21	26	28	30	22	22

a) Encuentra la variación diaria de temperatura.

	L	**M**	**M**	**J**	**V**	**S**	**D**
Variación de temperatura	*– 5*						

b) ¿Qué día hubo la mayor variación de temperatura? _______________

c) Encuentra la variación de temperatura por hora de cada día.

d) ¿Qué día hubo la mayor variación de temperatura por hora? _______________

e) Justifica por qué puedes usar la variación de temperatura para calcular la variación de temperatura por hora. ____

F8-21 Resolución de problemas con la ecuación de una recta

1. Un tren viaja a una velocidad constante de 50 km/h.

a) Formula una ecuación para la distancia que ha recorrido el tren al cabo de x horas. $y =$ __________

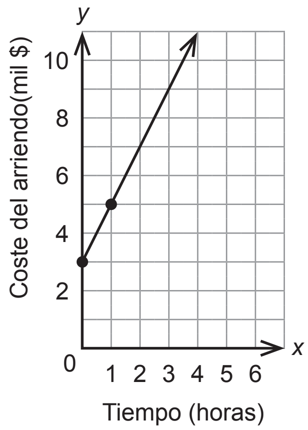
b) ¿Qué distancia recorre el tren en 3 horas? Pista: Sustituye x por 3. __________________

c) ¿Qué distancia recorre el tren en 4,5 horas? __________________

d) ¿Cuánto tarda el tren en recorrer 250 kilómetros?
Pista: Sustituye $y = 250$ en la ecuación y después, despeja x.

e) ¿Cuánto tarda el tren en recorrer 425 kilómetros?

2. Para arrendar un par de esquís, hay que pagar una tarifa fija de $3.000, más $2.000 por hora, tal y como muestra la gráfica.



a) ¿Cuánto cuesta arrendar un par de esquís durante 1 hora? ___________

b) ¿Cuánto cuesta arrendar un par de esquís durante 3 horas? ___________

c) Julia paga $10.000 por el arriendo de un par de esquís. ¿Por cuántas horas paga? ___________

d) Encuentra la intersección con el eje y y la pendiente de la recta.

int. con el eje y: ______ pendiente $= \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{}{} =$

e) Formula la ecuación de la recta. $y =$ ___________

f) Sustituye $x = 1$ en la ecuación para encontrar el coste de arrendar unos esquís durante 1 hora. __________________

g) ¿Dónde se indica la tarifa fija en la ecuación? __________________

h) ¿Cómo podemos encontrar el resultado de b) usando la ecuación? __________________

i) Encuentra el resultado de c) sustituyendo y por 10 en la ecuación y despejando x.

j) ¿Puedes usar la gráfica, tal como está, para encontrar el coste de arrendar un par de esquís durante 10 horas?

Justifica tu respuesta. ____

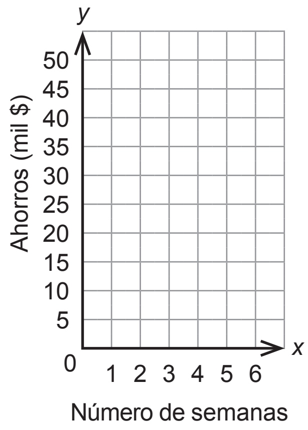
k) ¿Cómo puedes usar la ecuación para encontrar el coste de arrendar un par de esquís durante 10 horas?

____

3. Claudia tiene $10.000 y ahorra $5.000 cada semana.

a) Construye una tabla de valores de los ahorros de Claudia al cabo de x semanas.

x **semanas**	*y* **$ ahorrados**
0	*10.000*
1	*15.000*
2	
3	



b) Representa los pares ordenados de la tabla de valores en la gráfica de la derecha.

c) Encuentra la intersección con el eje y y la pendiente de la recta.

int. con el eje y: ____ pendiente $= \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{\quad}{\quad} =$

d) Formula la ecuación de la recta. $y =$ ________________

e) Claudia quiere comprar un monopatín que cuesta $85.000. ¿Cuántas semanas tiene que ahorrar para comprar el monopatín?

f) ¿Necesitas la gráfica para resolver *c*), *d*) y *e*)? ________________

4. Tomás tiene una tarjeta regalo de $25.000 para participar en un juego de rol en línea. La suscripción al juego cuesta $4.250 al mes.

a) ¿Cuánto dinero queda en la tarjeta regalo al final del primer mes? ________________

b) Completa la tabla de valores correspondiente al dinero que queda pasados x meses.

x **meses**	*y* **$ en la tarjeta regalo**
0	*25.000*
1	*20.750*
2	
3	

c) En la tabla anterior, encuentra la intersección con el eje y y la pendiente de la recta que pasa por todos los puntos.

d) Formula la ecuación de la recta. $y =$ ________________

e) ¿Cuánto dinero queda en la tarjeta regalo al cabo de 5 meses? ________________

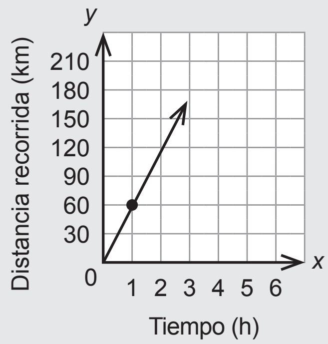
F8-22 Describir gráficas

La **velocidad** es la ratio de variación media de la distancia recorrida en un tiempo determinado.
Ejemplo: Un auto a una velocidad de 60 km/h recorre 60 km cada hora.

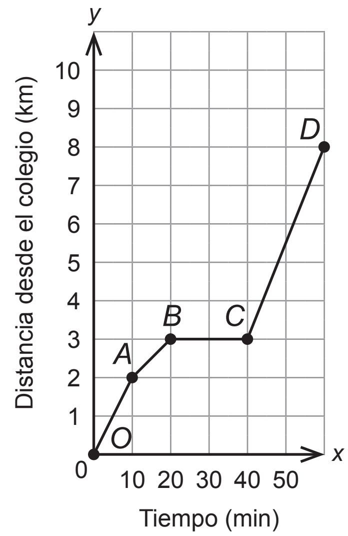
Para encontrar la velocidad, calculamos la pendiente de la recta en la gráfica de distancia y tiempo, donde el tiempo se indica en el eje horizontal.

Ejemplo: desplaz. $x = 1 - 0 = 1$ hora, y desplaz. $y = 60 - 0 = 60$ km

pendiente $= \dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{60}{1} = 60$, por tanto, la velocidad es 60 km/h.



1. Un grupo de alumnos de 8.º básico hacen una excursión en bicicleta desde el colegio. La gráfica muestra los tiempos y distancias de la excursión.



a) ¿Qué distancia recorren los alumnos en 1 hora? _______________

b) Completa la tabla para encontrar la pendiente entre:

		Desplaz. x (min)	Desplaz. y (km)	Pendiente (km/min)
i)	O y A	$10 - 0 = 10$	$2 - 0 = 2$	$\dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \dfrac{2}{10} = 0{,}2$
ii)	A y B			$\dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \_\_\_\_ =$
iii)	B y C			$\dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \_\_\_\_ =$
iv)	C y D			$\dfrac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \_\_\_\_ =$

c) ¿Qué segmento tiene la pendiente más pronunciada? ______

d) ¿Cuál es la máxima velocidad del grupo durante la excursión? ______

e) La velocidad máxima del grupo se da entre los ______ minutos y los ______ minutos.

f) Los alumnos paran para hacer un descanso. ¿Qué segmento representa el descanso? ______
Pista: Durante el descanso, la distancia desde el colegio no cambia.

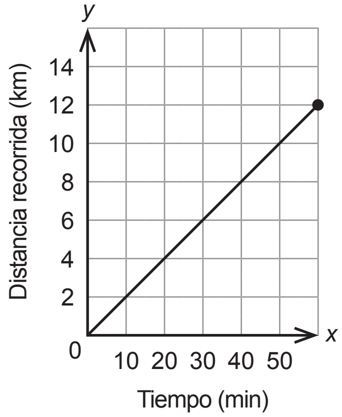
g) ¿Cuál es la velocidad de los alumnos durante el descanso? ______

2. Tres alumnos corren 12 km en 60 minutos.

- Berta empieza lenta y aumenta de velocidad a medida que toma fuerzas.
- Jaled corre a una velocidad constante.
- Ana empieza corriendo rápido y después reduce la velocidad.

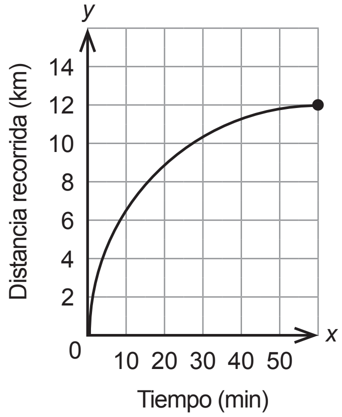
a) Relaciona las gráficas con el alumno correspondiente, escribiendo el nombre debajo de cada gráfica.

A.



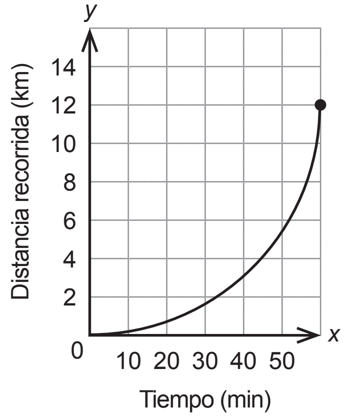
____

B.



____

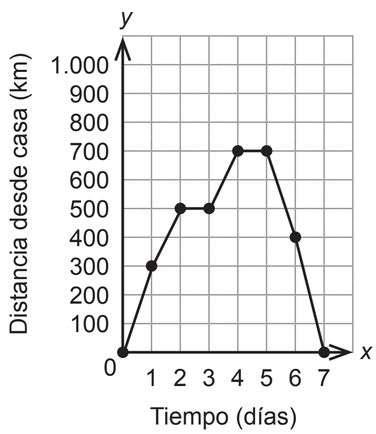
C.



____

b) ¿Qué gráfica representa una función lineal? ________________

3. Marta va a visitar a su tía (que vive a 500 km) y a su abuela (que vive a 700 km). La gráfica muestra la distancia a la que ha estado Marta de su casa en la última semana.



a) ¿Cuántos kilómetros recorre Marta el primer día? ________________

b) ¿Cuántos días tarda en llegar a casa de su tía?

____

c) ¿Cuántos días está sin viajar? ________________

d) ¿Cuántas noches pasa Marta en casa de su abuela?

____

e) Las noches que Marta no duerme en casa de sus familiares,

se aloja en un hotel. ¿Cuántas noches se aloja Marta en hoteles? ________________

f) Escribe una historia sobre el viaje de Marta en la que se describan todos los segmentos de la gráfica.

____

____

____

4. La gráfica muestra el número de medallas olímpicas totales ganadas por España entre 1992 y 2016.

a) Encuentra la pendiente de cada segmento.

b) ¿Qué segmento tiene la pendiente mayor? ______

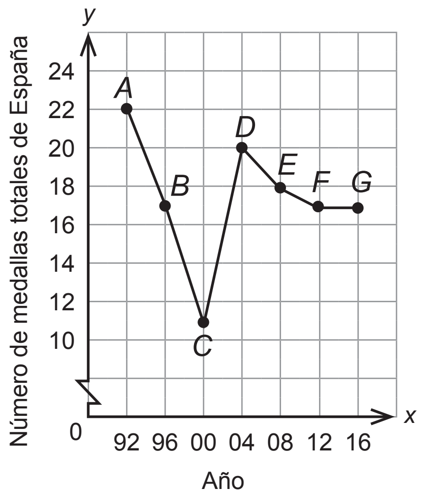
c) ¿En qué año obtuvo España los mejores resultados, en comparación con los resultados de los Juegos Olímpicos anteriores? ______

d) ¿Qué segmento tiene la pendiente menor? ______

e) ¿En qué año obtuvo España los peores resultados, en comparación con los resultados de los Juegos Olímpicos anteriores? ______

f) ¿Qué segmento tiene una pendiente igual a 0? ______

g) ¿En qué año los resultados no variaron respecto a los obtenidos en los Juegos Olímpicos anteriores? ______



5. Samuel vive a 900 m de su colegio. Hoy, Samuel:

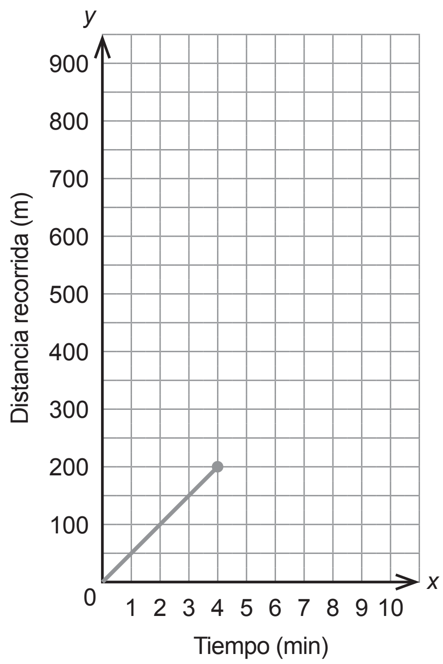
- Ha caminado 200 m en 4 minutos.
- Después, ha corrido 600 m en 3 minutos.
- Luego, ha descansado 1 minuto.
- Por último, ha caminado los últimos 100 m en 2 minutos.

a) ¿Qué distancia ha recorrido Samuel en los primeros 7 minutos? _______________

b) ¿Qué distancia ha recorrido Samuel en los primeros 8 minutos? _______________

c) Completa la tabla para encontrar la distancia que ha recorrido Samuel al cabo de *t* minutos. Después, usa la tabla para completar la gráfica de la derecha.

Tiempo (min)	4	7	8	10
Distancia recorrida (m)	*200*			



d) ¿Cuánto tarda Samuel en llegar al colegio? _______________

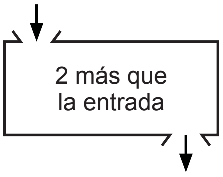
e) Encuentra la pendiente de cada segmento para calcular la velocidad de Samuel durante cada parte del recorrido:

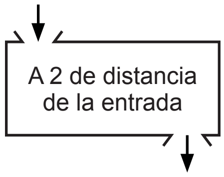
i) ii) iii) iv)

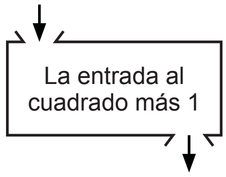
f) ¿En qué período de tiempo la gráfica tiene la pendiente más pronunciada? ______

F8-23 Repaso de funciones

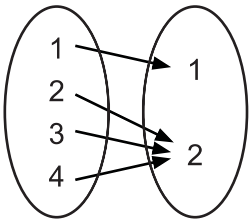
1. Prueba cualquier número de entrada para averiguar si la imagen representa una máquina. Rodea con un círculo las máquinas.

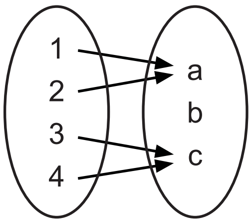
a) 

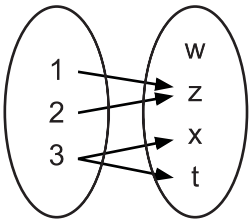
b) 

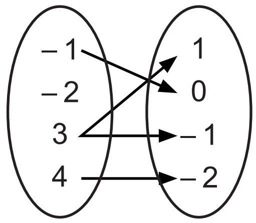
c) 

2. Rodea con un círculo los diagramas que representan una función.

A. 

B. 

C. 

D. 

Extra ▶ Dibuja un diagrama para el siguiente conjunto de pares ordenados. ¿Representa una función? (1, 1), (2, 4), (3, 4), (2, 2^2), (4, 2)

3. Usa la diferencia de la suseción para encontrar el coeficiente de la fórmula. Después, completa la tabla para completar la fórmula.

a)

Entrada (*n*)	***n* × diferencia**	**Salida**
1		5
2		8
3		11

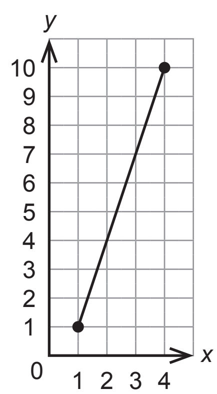
Fórmula: ____________________

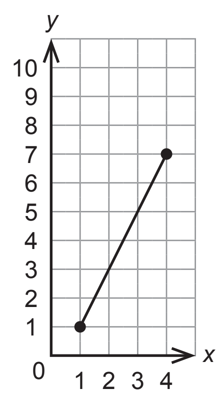
Extra ▶

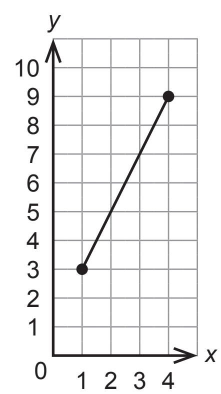
Entrada (*n*)	***n* × diferencia**	**Salida**
1		0
2		−2
3		−4

Fórmula: ____________________

4. Relaciona las gráficas con la ecuación correspondiente.

A. 

B. 

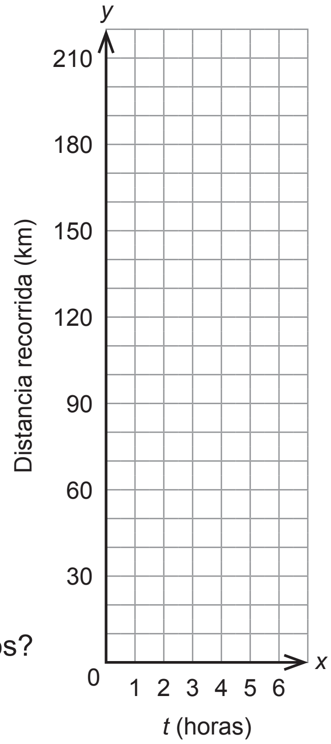
C. 

a) $y = 2x + 1$ ______ b) $y = 3x - 2$ ______ c) $y = 2x - 1$ ______

5. Un barco navega por el mar a una velocidad constante de 30 km/h.

a) Construye una tabla de valores para la distancia recorrida por el barco al cabo de *t* horas.

t (horas)	Distancia recorrida (km)
1	
2	
3	



b) Escribe los pares ordenados de la tabla de valores anterior. Después, representa los puntos en la gráfica de la derecha.

c) Une los puntos de la gráfica con una recta. Si el barco navega 3,5 horas,

¿qué distancia recorre aproximadamente? ___________

d) ¿Aproximadamente cuántas horas tarda el barco en recorrer 195 kilómetros?

Alarga la recta para calcularlo. ___________

e) Encuentra la pendiente de la recta usando la tabla de *a*). ___________

f) Escribe la ecuación de la recta. $y =$ ___________

g) Resuelve *c*) y *d*) usando la ecuación de la recta.

h) ¿Se puede usar la gráfica para encontrar cuánto tarda exactamente el barco en recorrer

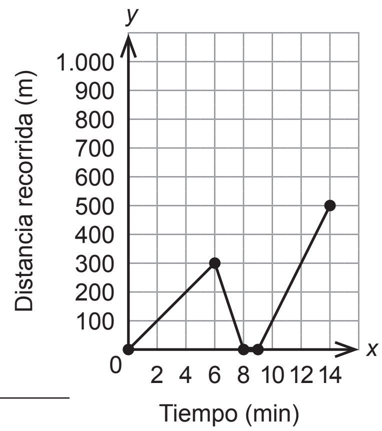
160 kilómetros? ________

i) Usa la ecuación de la recta para encontrar cuánto tarda exactamente el barco en recorrer 160 kilómetros.

6. Kevin sale de su casa y va caminando al colegio, que está a 500 m. Al cabo de un rato, se da cuenta de que ha olvidado algo. La gráfica muestra la distancia a la que estaba de casa.

a) ¿Qué distancia ha caminado Kevin antes de darse cuenta de que

ha olvidado algo? ___________



b) ¿Cuántos minutos tarda en volver a su casa? ___________

c) ¿Durante cuántos minutos está en su casa? ___________

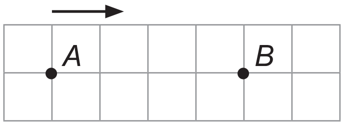
d) Encuentra la pendiente de los cuatro segmentos.

e) ¿Cuándo camina más deprisa Kevin en dirección al colegio: al salir de casa por primera vez o cuando recoge lo que ha olvidado? ___________

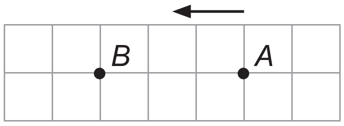
f) Escribe una historia que describa la gráfica.

G8-17 Traslaciones

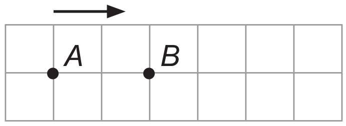
1. ¿Cuántas unidades hacia la derecha o hacia la izquierda se ha desplazado el punto desde la posición *A* hasta la posición *B*?

a)


____ unidades hacia la *derecha*

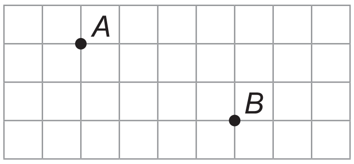
b)


____ unidades hacia la ________

c)


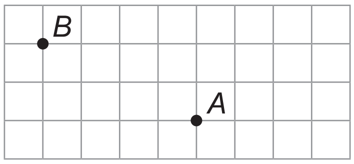
____ unidades hacia la ______

2. ¿Cuántas unidades hacia la derecha o hacia la izquierda y cuántas unidades hacia arriba o hacia abajo se ha desplazado el punto desde la posición *A* hasta la posición *B*?

a)


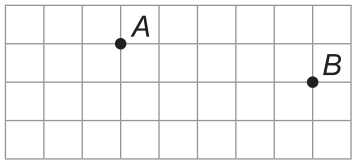
____ unidades hacia la derecha

____ unidades hacia abajo

b)


____ unidades hacia la izquierda

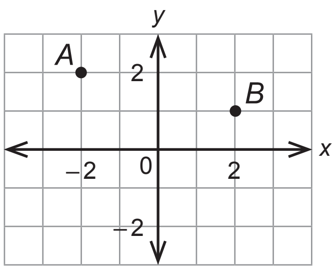
____ unidades hacia arriba

c)


____ unidades hacia la derecha

____ unidades hacia abajo

3. ¿Cuántas unidades hacia la derecha o hacia la izquierda y cuántas unidades hacia arriba o hacia abajo se ha desplazado el punto desde la posición *A* hasta la posición *B*? Escribe las coordenadas de ambos puntos.

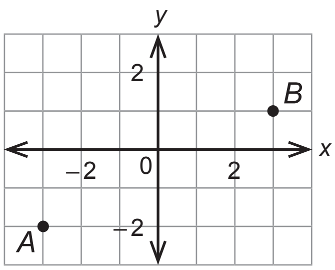
a)


____ unidades hacia la derecha

____ unidades hacia abajo

A (,)

B (,)

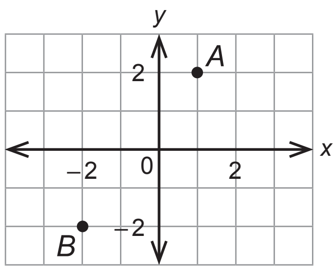
b)


____ unidades hacia la derecha

____ unidades hacia arriba

A (,)

B (,)

c)


____ unidades hacia la izquierda

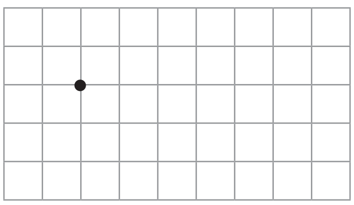
____ unidades hacia abajo

A (,)

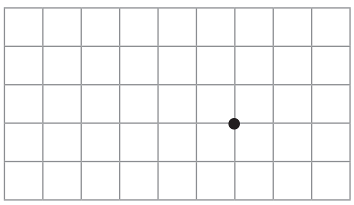
B (,)

4. Desplaza el punto.

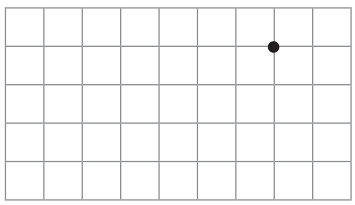
a) 5 unidades hacia la derecha, 2 unidades hacia abajo



b) 6 unidades hacia la izquierda, 3 unidades hacia arriba



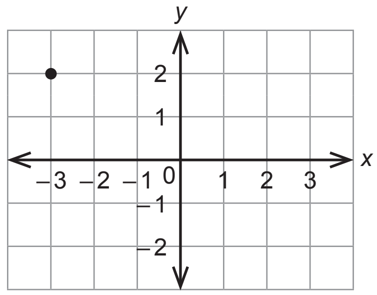
c) 3 unidades hacia la izquierda, 4 unidades hacia abajo



El término matemático para referirse a un desplazamiento es **traslación**. El punto o la figura que resulta de una traslación se llama **punto homólogo** o **figura homóloga**.

5. Traslada el punto las unidades dadas. Escribe las coordenadas del punto original y del homólogo.

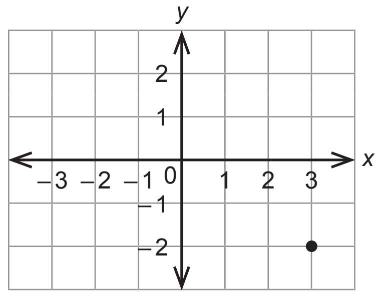
a) 5 unidades hacia la derecha, 2 unidades hacia abajo



punto original (,)

homólogo (,)

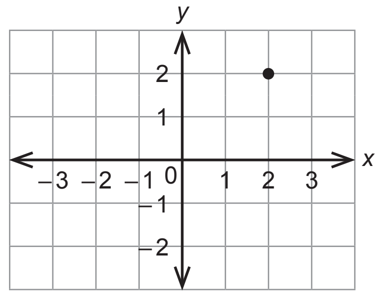
b) 6 unidades hacia la izquierda, 3 unidades hacia arriba



punto original (,)

homólogo (,)

c) 5 unidades hacia la izquierda, 4 unidades hacia abajo



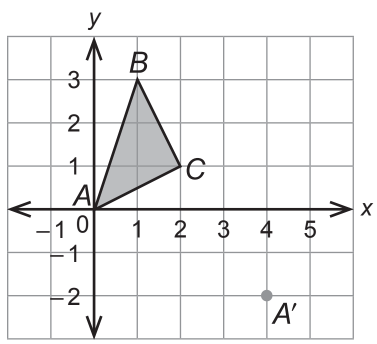
punto original (,)

homólogo (,)

Para distinguir entre el punto original y el homólogo, añadimos la prima (′) o un asterisco (*) a la leyenda del homólogo. Podemos escribir *a* o usar una flecha para representar una traslación: *A* a *A*′ o *B* → *B**.

6. Traslada los vértices 4 unidades hacia la derecha y 2 unidades hacia abajo. Une los nuevos vértices para dibujar el triángulo homólogo. Escribe las coordenadas de los vértices originales y los homólogos.

a)

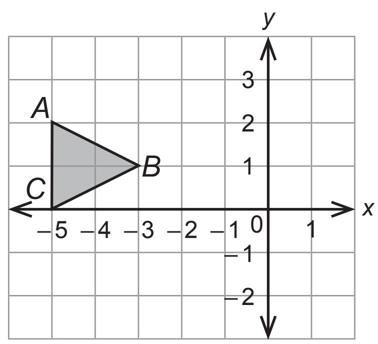


A (0 , 0) → *A*′ (4 , −2)

B (,) → *B*′ (,)

C (,) → *C*′ (,)

b)

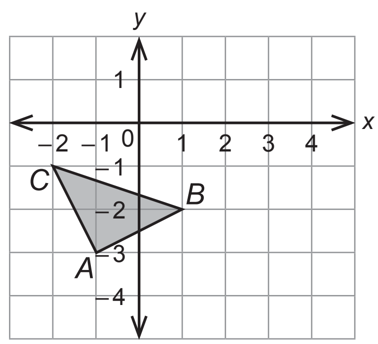


A (,) → *A*′ (,)

B (,) → *B*′ (,)

C (,) → *C*′ (,)

c)



A (,) → *A** (,)

B (,) → *B** (,)

C (,) → *C** (,)

7. Dibuja las figuras en un sistema de coordenadas cartesianas, traslada los vértices y únelos para dibujar las figuras homólogas. Después, escribe las coordenadas de los vértices homólogos.

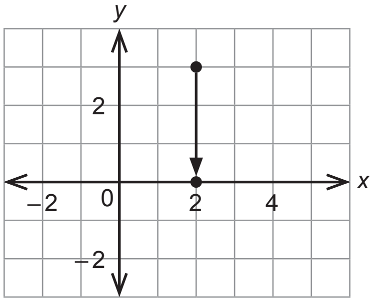
a) Un cuadrado con los vértices *A* (1, 1), *B* (1, 3), *C* (3, 3), *D* (3, 1); 3 unidades hacia la derecha, 4 unidades hacia arriba.

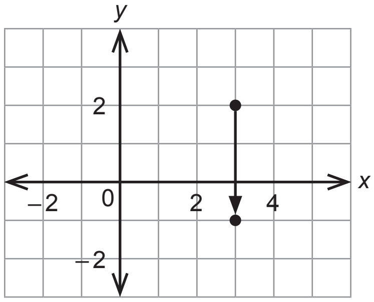
b) Un triángulo con los vértices *A* (3, 7), *B* (2, 5), *C* (5, 4); 4 unidades hacia la izquierda, 3 unidades hacia abajo.

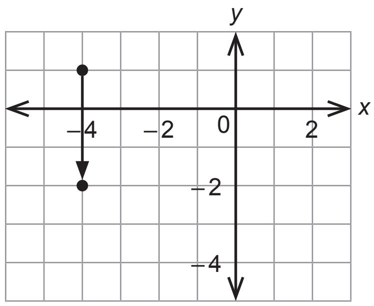
G8-18 Describir traslaciones

1. a) Un punto se traslada 3 unidades hacia abajo. Encuentra las coordenadas del homólogo.

i) (2, 3) ➞ (,   )   ii) (3, 2) ➞ (,   )   iii) (–4, 1) ➞ (,   )







b) ¿Qué coordenada varía en la traslación? ________________

c) Identifica el patrón y descríbelo: la coordenada ______ decrece en ______.
Escribe una expresión algebraica que describa la variación en la coordenada *y*.

Usa *y* a modo de variable. *y* ➞ ___________

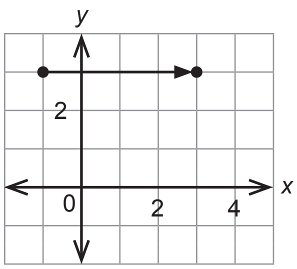
d) Usa la expresión de *c*) para deducir las coordenadas del punto después de que este se traslade 3 unidades hacia abajo.

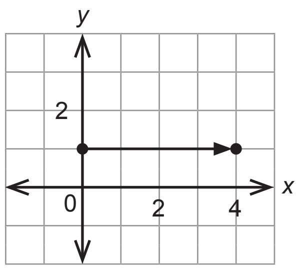
i) (–1, 2) ➞ (,   )   ii) (0, 3) ➞ (,   )   iii) (–1, 0) ➞ (,   )

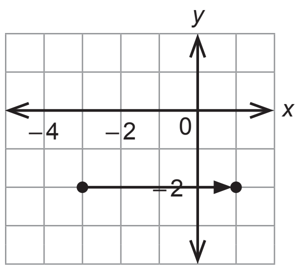
e) Representa los puntos de *d*) y sus homólogos en los sistemas de coordenadas cartesianas anteriores para comprobar tus deducciones.

2. a) Un punto se traslada 4 unidades hacia la derecha. Encuentra las coordenadas del homólogo.

i) (–1, 3) ➞ (,   )   ii) (0, 1) ➞ (,   )   iii) (–3, –2) ➞ (,   )







b) ¿Qué coordenada varía en la traslación? _______________

c) Identifica el patrón y descríbelo: la coordenada ______ aumenta en ______.
Escribe una expresión algebraica que describa la variación en la coordenada *x*.

Usa *x* a modo de variable. *x* ➞ _______________

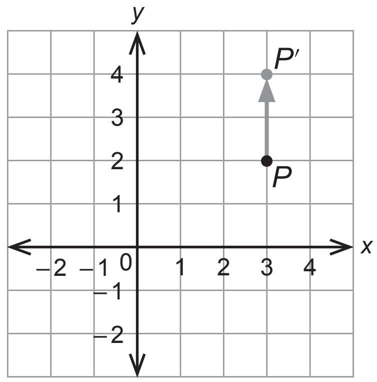
d) Usa la expresión de *c*) para deducir las coordenadas del punto después de que este se traslade 4 unidades hacia la derecha.

i) (–1, –1) ➞ (,   )   ii) (1, 3) ➞ (,   )   iii) (–4, 1) ➞ (,   )

e) Representa los puntos de *d*) y sus homólogos en los sistemas de coordenadas cartesianas anteriores para comprobar tus deducciones.

3. Traslada el punto P dos unidades en la dirección dada. Escribe las coordenadas de su homólogo. ¿Qué coordenada varía y en cuánto varía?

a) 2 unidades hacia arriba

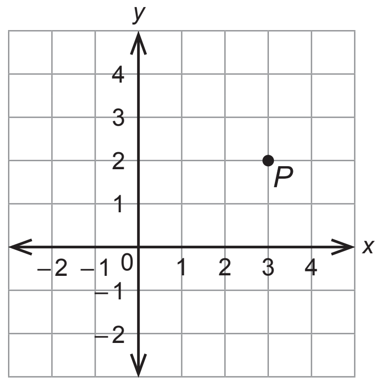


$P\,(3, 2) \rightarrow P'\,($, $)$

La coordenada *y*

aumenta en 2 .

b) 2 unidades hacia abajo

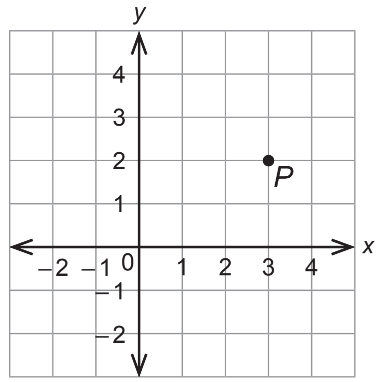


$P\,(3, 2) \rightarrow P'\,($, $)$

La coordenada _____

____________________.

c) 2 unidades hacia la izquierda



$P\,(3, 2) \rightarrow P'\,($, $)$

La coordenada _____

____________________.

4. El punto $Q\,(x, y)$ se traslada al punto Q'. Relaciona las coordenadas de Q' con la descripción de la traslación.

A. 4 unidades hacia arriba

B. 4 unidades hacia abajo

C. 4 unidades hacia la izquierda

D. 4 unidades hacia la derecha

a) $Q'\,(x + 4, y)$ *D*

b) $Q'\,(x, y - 4)$ _____

c) $Q'\,(x, y + 4)$ _____

d) $Q'\,(x - 4, y)$ _____

5. Escribe una expresión algebraica para la variación de cada coordenada después de la traslación.

a) 5 unidades hacia la derecha, 2 unidades hacia abajo

$(x, y) \rightarrow$ *$(x + 5, y - 2)$*

b) 6 unidades hacia la izquierda, 3 unidades hacia arriba

$(x, y) \rightarrow$ _______________

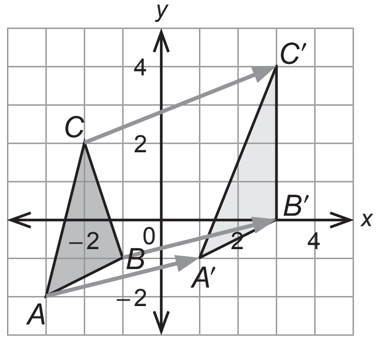
c) 3 unidades hacia la izquierda, 4 unidades hacia abajo

$(x, y) \rightarrow$ _______________

Cuando una figura se traslada, todos sus puntos se desplazan en la misma dirección.

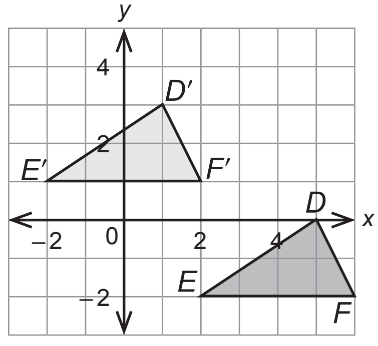
6. Dibuja vectores desde cada vértice de la figura hasta sus homólogos. ¿Los vectores son paralelos y tienen la misma longitud? ¿Representan una traslación?

a)



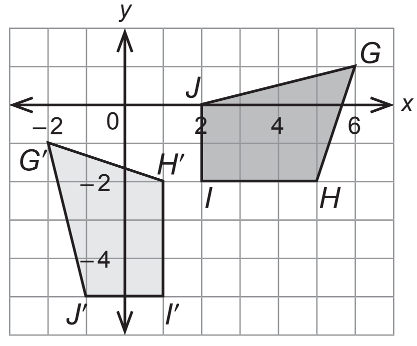
no

b)



____

c)



____

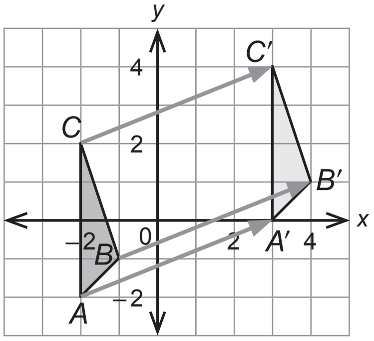
En matemáticas, se dice que A' es la "homóloga de A". Para describir una traslación:

Paso 1: Dibujamos vectores desde cada vértice de la figura hasta su (vértice) homólogo. Comprobamos que los vectores son paralelos y tienen la misma longitud.

Paso 2: Comprobamos los vectores para ver cuántas unidades hacia arriba o abajo y hacia la izquierda o la derecha se han trasladado los vértices de la figura. Indicamos el número de unidades y la dirección de la traslación.

7. Describe las traslaciones.

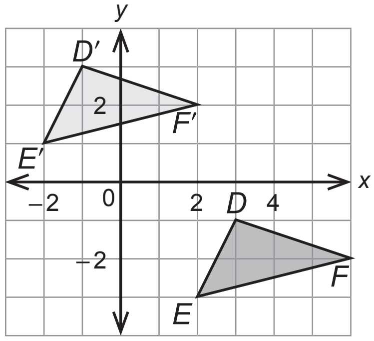
a)



5 unidades hacia la derecha

2 unidades hacia arriba

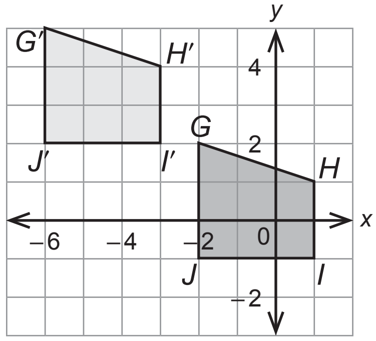
b)



____

____

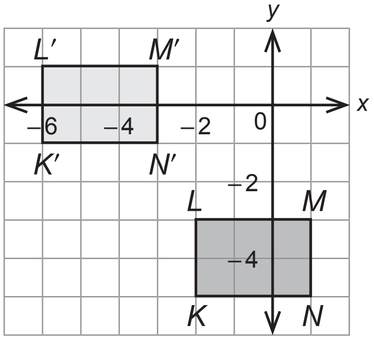
c)



____

____

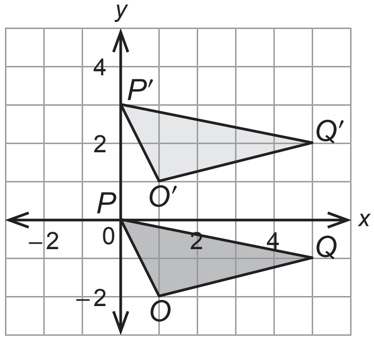
d)



____

____

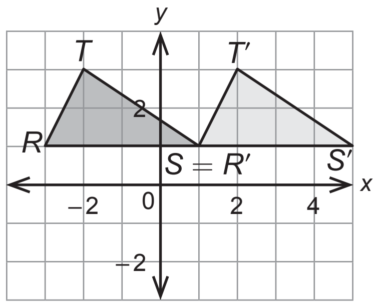
e)



____

____

Extra ▶



____

____

8. Escribe una expresión algebraica para las variaciones de las coordenadas de cada traslación del ejercicio 7.

a) $(x, y) \rightarrow$ *$(x + 5, y + 2)$* b) $(x, y) \rightarrow$ __________ c) $(x, y) \rightarrow$ __________

d) $(x, y) \rightarrow$ __________ e) $(x, y) \rightarrow$ __________ **Extra ▶** $(x, y) \rightarrow$ __________

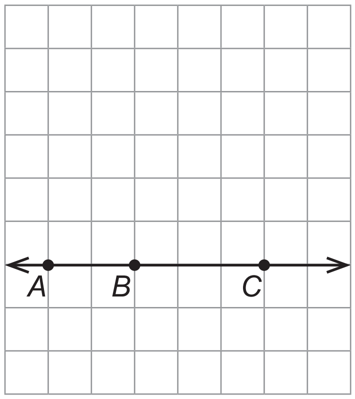
9. Alicia cree que puede escribir una expresión algebraica para las variaciones en las coordenadas trasladadas usando solo la suma; sin usar la resta. ¿Tiene razón? Si es así, escribe las expresiones del ejercicio 8 usando solo la suma. Si no es así, justifica por qué es imposible. Usa ejemplos como los del ejercicio 8 en tu respuesta.

10. Dibuja un polígono en un sistema de coordenadas cartesianas, desplázalo y describe la traslación.

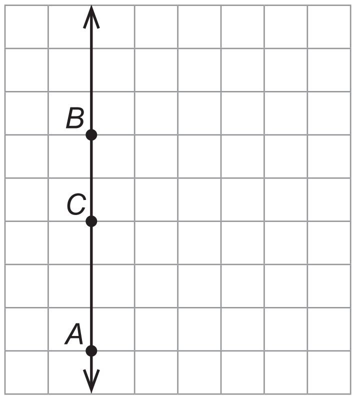
G8-19 Propiedades de las traslaciones

1. a) Traslada los puntos *A* y *C* 2 unidades hacia la derecha y 3 unidades hacia arriba. Señala sus homólogos como *A′* y *C′*. Traza la recta *A′C′*.

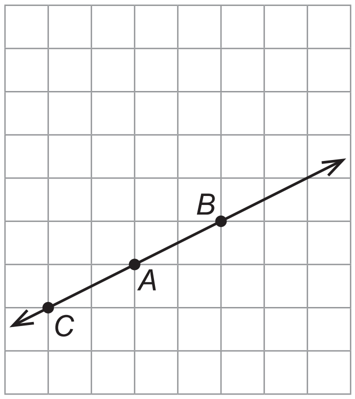
i)



ii)



iii)

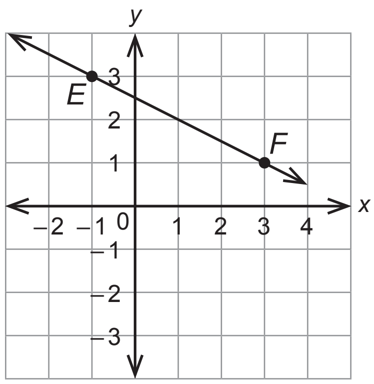


b) El punto *B* se encuentra en la recta *AC*. Traslada el punto *B* 2 unidades hacia la derecha y 3 unidades hacia arriba. Señala el homólogo como *B′*. ¿Se encuentra *B′* en la recta *A′C′*?

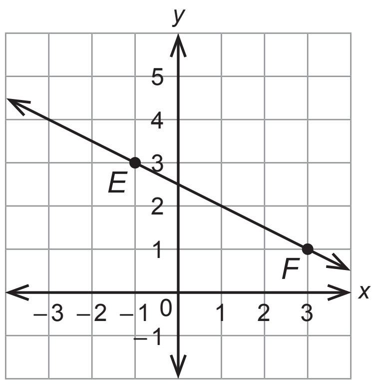
i) _______________ ii) _______________ iii) _______________

c) Traslada los puntos *E* y *F* según las indicaciones. Señala sus homólogos como *E′* y *F′*. Traza la recta *E′F′*.

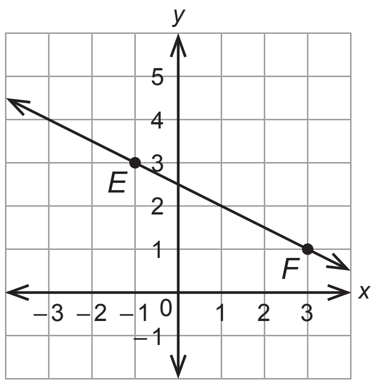
i) 4 unidades hacia abajo



ii) 3 unidades hacia la izquierda



iii) 2 unidades hacia la izquierda
3 unidades hacia arriba



d) Escoge un punto *G* en la recta *EF*. Las coordenadas de *G* son (,). Marca el punto y señálalo como *G* en cada sistema de coordenadas cartesianas de *c*).

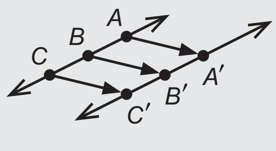
e) Traslada el punto G según las indicaciones del ejercicio c). ¿Cuáles son las coordenadas de los homólogos?

i) *G′* (,) ii) *G′* (,) iii) *G′* (,)

f) ¿Se encuentra el punto *G′* en la recta *E′F′*?

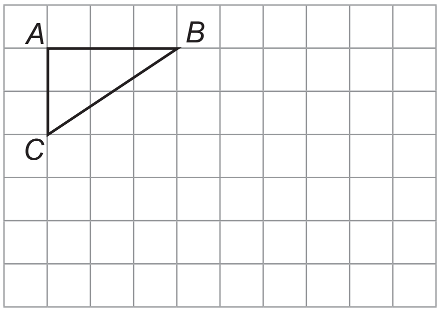
i) _______________ ii) _______________ iii) _______________

En matemáticas, se dice que las traslaciones transforman rectas en rectas. Las traslaciones conservan el orden de los puntos en una recta. Si el punto *B* se encuentra entre los puntos *A* y *C*, entonces el punto *B′* se encuentra entre los puntos *A′* y *C′*

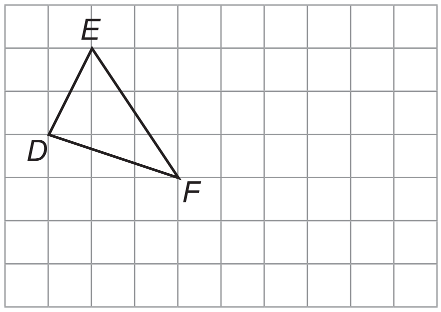


2. a) Usa una regla para medir los lados de los triángulos.

i)



ii)



$AB =$ ___________

$AC =$ ___________

$BC =$ ___________

$DE =$ ___________

$EF =$ ___________

$DF =$ ___________

b) Traslada cada triángulo 6 unidades hacia la derecha y 2 unidades hacia abajo. Usa $'$ para señalar los vértices homólogos.

c) Mide los lados homólogos.

i) $A'B' =$ ___________

$A'C' =$ ___________

$B'C' =$ ___________

ii) $D'E' =$ ___________

$E'F' =$ ___________

$D'F' =$ ___________

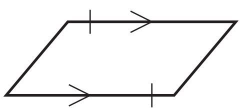
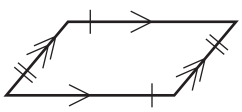
d) Los lados de los triángulos son segmentos. ¿Esta traslación conserva la longitud de los segmentos? ________________

Extra ▶ ¿Qué puedes afirmar acerca del triángulo y su homólogo? Explícalo con un criterio de congruencia.

____

____

RECUERDA: Si los lados opuestos de un cuadrilátero son paralelos e iguales, los otros dos lados también son paralelos e iguales y, por tanto, la figura es un paralelogramo.

 indica que 

3. a) Describe una traslación cualquiera.

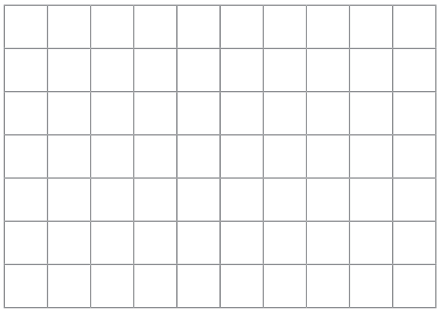
b) Traza PQ en un sistema de coordenadas cartesianas. Usa la traslación del ejercicio anterior para trasladar PQ. Designa al homólogo $P'Q'$.

c) Traza los segmentos PP' y QQ'.

d) Todos los puntos de PQ se trasladan en el mismo sentido. ¿Qué indica esto acerca de PP' y QQ'? Usa el cuadrilátero $PP'Q'Q$ para justificar por qué $PQ = P'Q'$.

4. a) Describe una traslación cualquiera:

______ unidades ___________, ______ unidades ___________



b) Traza la recta *MN* en la cuadrícula. Usa la traslación de *a*) para desplazar *MN*. Designa a la homóloga *M′N′*.

c) Traza los segmentos *MM′* y *NN′*.

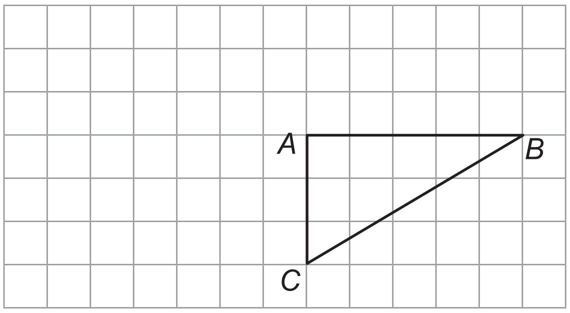
d) ¿Qué sabes acerca de *MM′* y *NN′*? Usa el cuadrilátero *MM′N′N* para justificar por qué *MN* || *M′N′*.

____

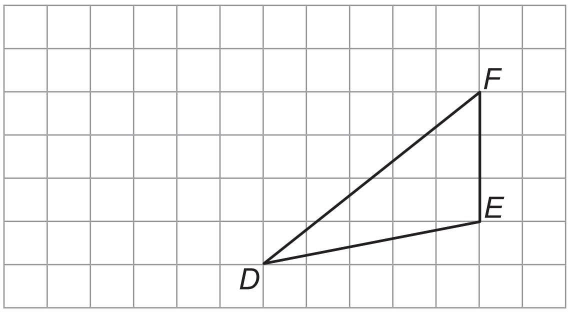
____

5. a) Mide los ángulos de los triángulos.

i)



ii)



$\angle A =$ ___________ $\angle D =$ ___________

$\angle B =$ ___________ $\angle E =$ ___________

$\angle C =$ ___________ $\angle F =$ ___________

b) Traslada cada triángulo 5 unidades hacia la izquierda y 2 unidades hacia arriba. Usa ′ para señalar los vértices homólogos.

c) Mide los ángulos de cada homólogo.

i) $\angle A' =$ ___________ ii) $\angle D' =$ ___________

$\angle B' =$ ___________ $\angle E' =$ ___________

$\angle C' =$ ___________ $\angle F' =$ ___________

d) ¿Qué observas acerca de los ángulos de cada triángulo y sus homólogos?

____

¿La traslación conserva la amplitud de los ángulos? ___________

6. ¿Verdadero o falso? Si la afirmación es verdadera, justifica por qué. Si la afirmación es falsa, dibuja un contraejemplo.

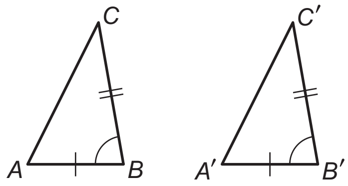
a) Un triángulo y su homólogo son congruentes.

Extra ▶ ¿Se cumple esto también a la inversa? Si dos triángulos son congruentes, ¿existe una traslación que transforme un triángulo en el otro triángulo?

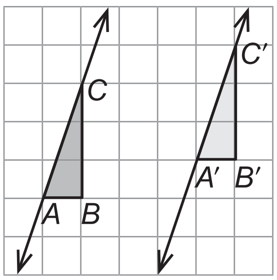
G8-20 Rectas paralelas y traslaciones

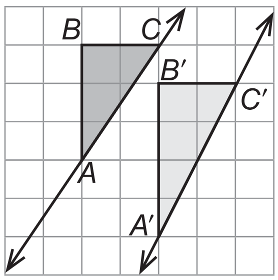
RECUERDA: Criterio de congruencia lado-ángulo-lado (LAL)

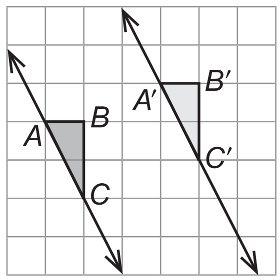
Si ABC y $A'B'C'$ son triángulos con $AB = A'B'$,
$\angle B = \angle B'$ y $BC = B'C'$;
por tanto, $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.



1. ¿Son congruentes los triángulos ABC y $A'B'C'$?

a)


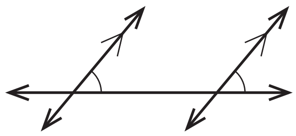
b)


c)


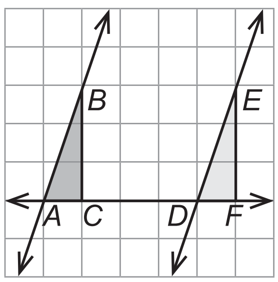
__________ __________ __________

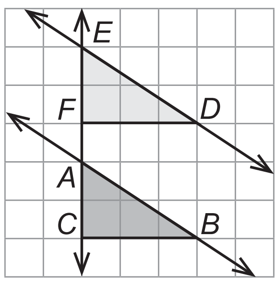
RECUERDA: Los ángulos correspondientes de rectas paralelas son iguales.

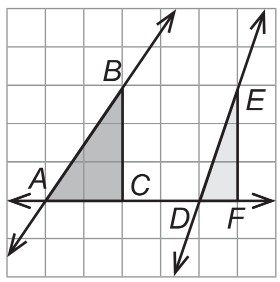
Si los ángulos correspondientes son iguales, las rectas son paralelas.



2. a) ¿Puedes aplicar el criterio LAL a los triángulos ABC y DEF? Si es así, escribe los dos pares de lados iguales y los ángulos iguales. Si no es así, escribe *no*.

i)


ii)


iii)


i) *$AC = DF$, $\angle C = \angle F$,*
$CB = FE$

ii) __________

iii) __________

b) Marca un par de ángulos de los triángulos ABC y DEF que sean ángulos correspondientes de las rectas AB y DE.

c) ¿Son iguales los ángulos que has marcado en el ejercicio *b*)?

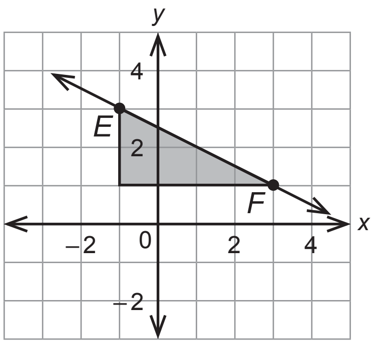
i) *sí* ii) ________ iii) ________

d) ¿Son paralelas las rectas AB y DE?

i) *sí* ii) ________ iii) ________

3. Encuentra el desplazamiento horizontal, el desplazamiento vertical y la pendiente de las rectas.

a)

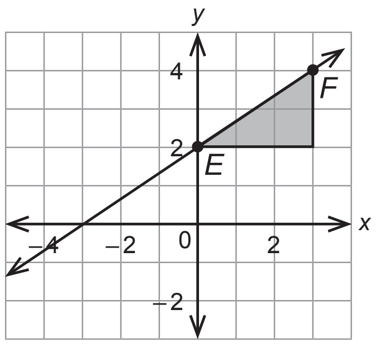


desplaz. $x =$ $3 - (-1) = 4$

desplaz. $y =$ $1 - 3 = -2$

pendiente $= \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

b)

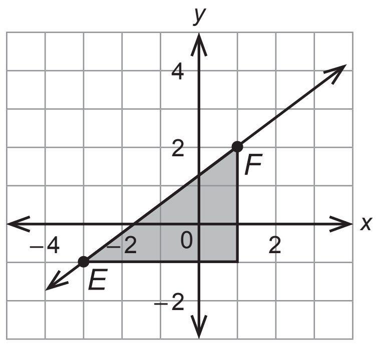


desplaz. $x =$ ____________

desplaz. $y =$ ____________

pendiente $=$

c)



desplaz. $x =$ ____________

desplaz. $y =$ ____________

pendiente $=$

4. a) Encuentra la pendiente de las rectas del ejercicio 2.

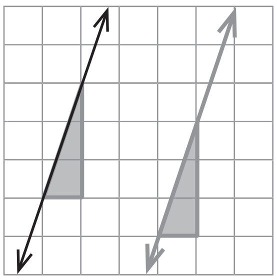
i) pendiente $AB =$ ii) pendiente $AB =$ iii) pendiente $AB =$

pendiente $DE =$ pendiente $DE =$ pendiente $DE =$

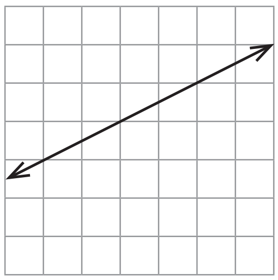
b) ¿Qué observas acerca de las pendientes de rectas paralelas? ________________________

5. En las siguientes rectas, dibuja un triángulo y un triángulo congruente para trazar una recta paralela.

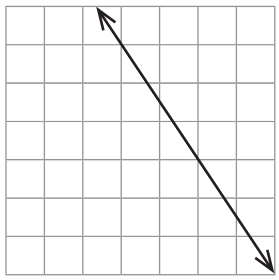
a)



b)

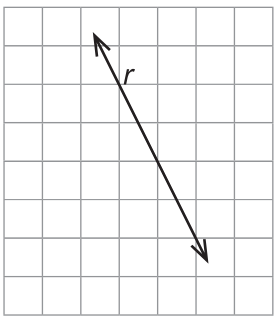


c)



Para trasladar una recta, escogemos dos de sus puntos y los trasladamos. A continuación, trazamos una nueva recta que pase por los puntos homólogos.

6. a) Traza las rectas según las indicaciones. Encuentra la pendiente de las rectas y sus homólogas.



i) $r \rightarrow r'$

3 unidades hacia la derecha,
1 unidad hacia arriba

ii) $r \rightarrow r^*$

2 unidades hacia abajo,
2 unidades hacia la izquierda

pendiente $r =$ pendiente $r' =$ pendiente $r^* =$

b) ¿Las traslaciones cambian la pendiente de una recta? ___________

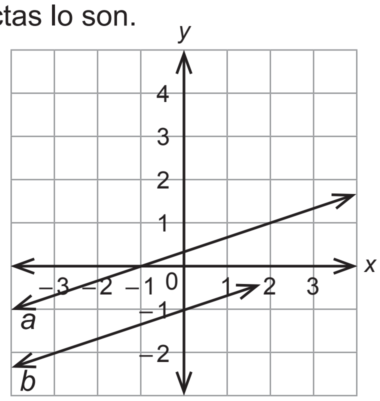
Las rectas paralelas tienen la misma pendiente.

7. Trasladamos la recta *n* 27 unidades hacia arriba y 72 unidades hacia la izquierda y obtenemos la recta *n′*. Trasladamos la recta *n* 13 unidades hacia abajo y 6 unidades hacia la derecha y obtenemos la recta *n**. ¿Son paralelas las rectas *n′* y *n**? Justifica tu respuesta.

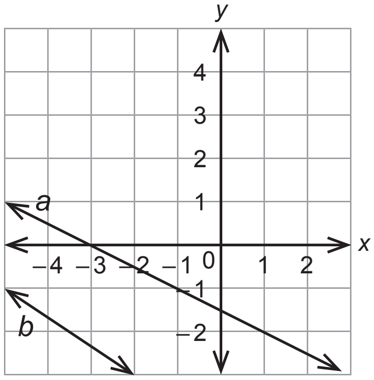
RECUERDA: Podemos usar dos puntos cualesquiera de una recta para encontrar el desplazamiento horizontal, el desplazamiento vertical y la pendiente. Para facilitar los cálculos, escogemos puntos cuyas coordenadas sean números enteros.

8. a) Encuentra las pendientes de las rectas y comprueba si son paralelas. Indica con flechas qué rectas lo son.

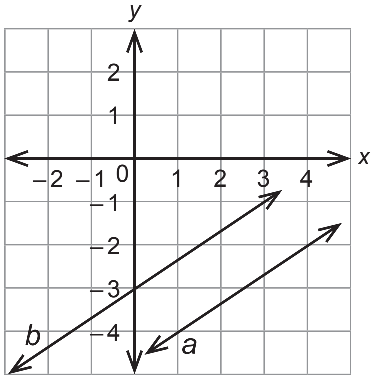
i)



ii)



iii)



i) pendiente *a* =

pendiente *b* =

ii) pendiente *a* =

pendiente *b* =

iii) pendiente *a* =

pendiente *b* =

b) Traslada las rectas 3 unidades hacia arriba y 2 hacia la derecha. Designa las rectas homólogas *a′* y *b′*.

c) Usa las pendientes para determinar si *a′* y *b′* son paralelas. Señala las rectas paralelas con flechas.

i) pendiente *a′* =

pendiente *b′* =

ii) pendiente *a′* =

pendiente *b′* =

iii) pendiente *a′* =

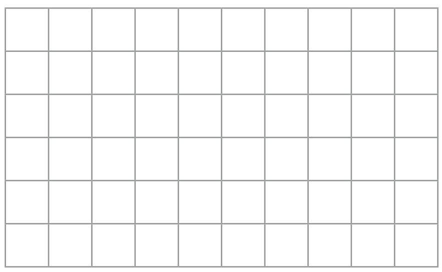
pendiente *b′* =

d) ¿Esta traslación transforma rectas paralelas en rectas paralelas? ___________

9. a) Dibuja dos triángulos congruentes en cualquier parte de la cuadrícula.

b) ¿Puedes desplazarte de un triángulo al otro con una traslación? Si es así, describe la traslación. Si no es así, explica por qué.

c) Dibuja dos triángulos congruentes de modo que no exista ninguna traslación que transforme un triángulo en el otro. Usa la pendiente de uno de los lados para explicar por qué no existe ninguna traslación.



Extra ▶ Las traslaciones transforman triángulos congruentes en triángulos congruentes. Usa triángulos rectángulos, como en el ejercicio 2, para explicar por qué las traslaciones transforman rectas paralelas en rectas paralelas.

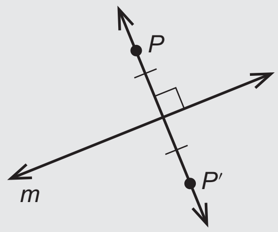
G8-21 Reflexiones

Para **reflejar** un punto *P* respecto a un **eje de simetría** *m*:

Paso 1: Trazamos una recta que pase por *P* y sea perpendicular a *m*. Alargamos la recta más allá de *m*.

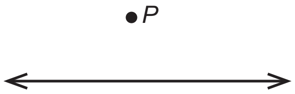
Paso 2: Medimos la distancia desde *P* hasta *m* sobre la recta perpendicular.

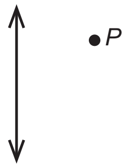
Paso 3: Marcamos el punto *P′* en la recta perpendicular, al otro lado de *m*, de modo que *P* y *P′* se encuentren a la misma distancia del eje de simetría *m*.

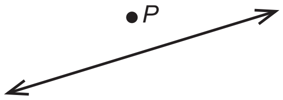


El punto *P′* es el **simétrico**, el **homólogo** o la **imagen** de *P*. En matemáticas, se dice que *P′* es el homólogo resultado de la **reflexión** de *P* respecto al eje *m*.

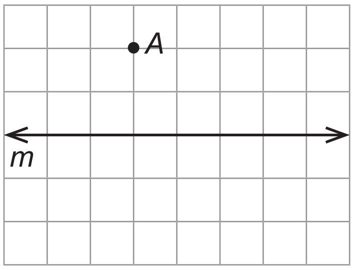
1. Usa una regla y un transportador. Refleja los puntos *P* respecto a los ejes de simetría dados.

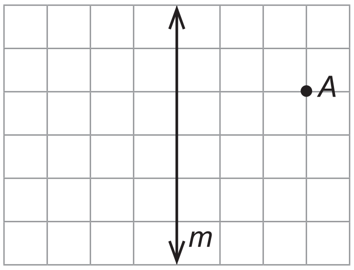
a) 

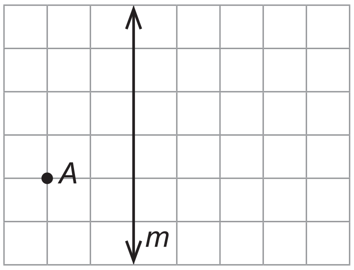
b) 

c) 

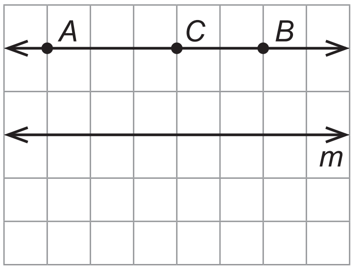
2. Cuenta los cuadrados de las cuadrículas para reflejar los puntos *A* respecto a las rectas dadas.

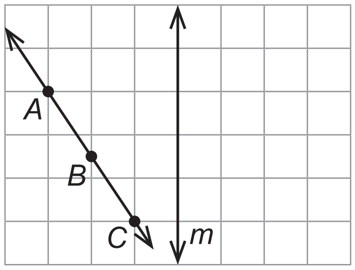
a) 

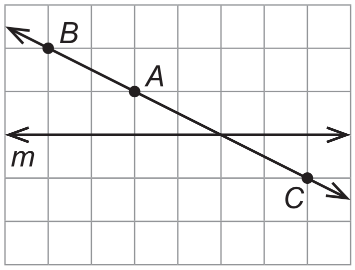
b) 

c) 

3. a) Refleja los puntos *A* y *C* respecto a la recta *m*. Designa a sus homólogos *A′* y *C′*. Traza la recta *A′C′*.

i) 

ii) 

iii) 

b) En el ejercicio *a*), el punto *B* pertenece a la recta *AC*. En cada caso, refleja el punto *B* respecto a la recta *m*. Designa al homólogo *B′*. ¿Pertenece *B′* a la recta *A′C′*?

i) ___________ ii) ___________ iii) ___________

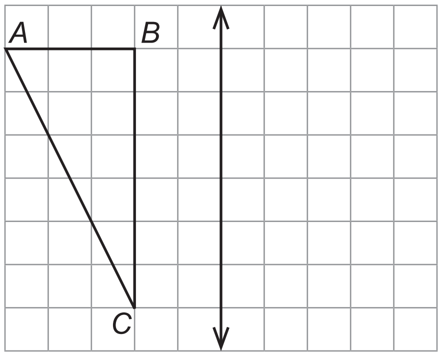
c) ¿Las reflexiones transforman rectas en rectas? ___________

d) Compara el orden de los puntos *A*, *B* y *C* en la recta *AC* con el orden de los puntos *A′*, *B′* y *C′* en la recta *A′C′*. ¿El orden de los puntos se mantiene en una recta reflejada? ___________

Para reflejar una figura respecto a un eje de simetría, reflejamos los vértices de la figura y a continuación, unimos los vértices homólogos.

4. a) Usa una regla para medir los lados de cada triángulo.

i)

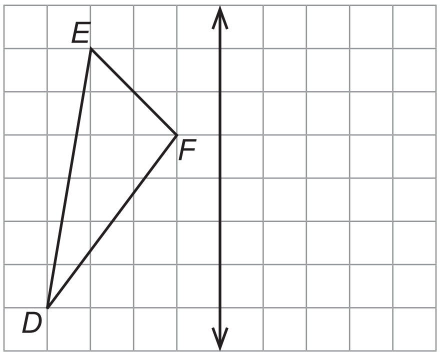


$AB =$ ___________

$AC =$ ___________

$BC =$ ___________

ii)



$DE =$ ___________

$EF =$ ___________

$DF =$ ___________

b) Refleja cada triángulo respecto a la recta dada. Usa ′ para señalar los vértices homólogos.

c) Mide los lados de cada homólogo.

i) $A'B' =$ ___________ ii) $D'E' =$ ___________

$A'C' =$ ___________ $E'F' =$ ___________

$B'C' =$ ___________ $D'F' =$ ___________

d) Los lados de los triángulos son segmentos. ¿La reflexión conserva la longitud de los segmentos? ___________

e) Mide los ángulos de los triángulos anteriores.

i) $\angle A =$ ______, $\angle B =$ ______, $\angle C =$ ______ ii) $\angle D =$ ______, $\angle E =$ ______, $\angle F =$ ______

$\angle A' =$ ______, $\angle B' =$ ______, $\angle C' =$ ______ $\angle D' =$ ______, $\angle E' =$ ______, $\angle F' =$ ______

f) ¿Qué observas acerca de los ángulos de cada triángulo y su homólogo? ______________________

¿La reflexión conserva la amplitud de los ángulos? ___________

5. ¿Verdadero o falso? Si la afirmación es verdadera, justifica por qué. Si la afirmación es falsa, dibuja un contraejemplo.

a) Un triángulo y su imagen son congruentes.

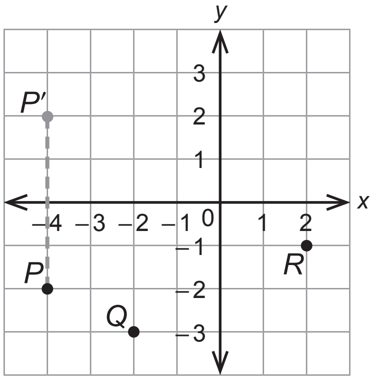
b) Si dos triángulos son congruentes, uno es la imagen del otro.

6. Dibuja un triángulo escaleno *XYZ* en una cuadrícula. Traza una recta horizontal. Refleja ΔXYZ respecto a la recta. Designa al homólogo $X'Y'Z'$. Traslada ΔXYZ 6 unidades hacia la derecha y designa al homólogo $X^*Y^*Z^*$. ¿Qué tienen en común $X'Y'Z'$ y $X^*Y^*Z^*$? ¿En qué se diferencian?

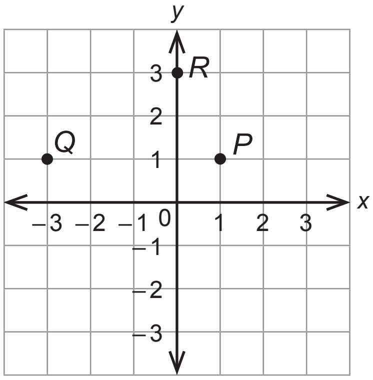
G8-22 Reflexiones en el plano de coordenadas

1. Refleja los puntos *P, Q* y *R* respecto al eje *x*. Señala los puntos homólogos y escribe las coordenadas de los puntos originales y de los homólogos.

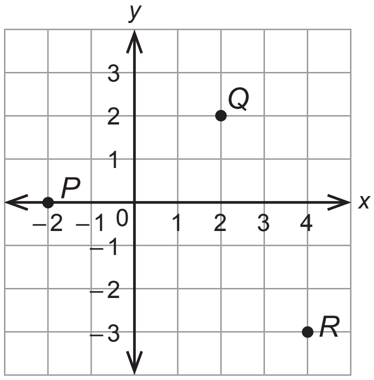
a)



b)



c)



a)	b)	c)
P (,) → *P′* (,)	*P* (,) → *P′* (,)	*P* (,) → *P′* (,)
Q (,) → *Q′* (,)	*Q* (,) → *Q′* (,)	*Q* (,) → *Q′* (,)
R (,) → *R′* (,)	*R* (,) → *R′* (,)	*R* (,) → *R′* (,)

2. Observa tus respuestas del ejercicio 1.

a) ¿Qué coordenada permanece igual después de la reflexión respecto al eje *x*? ____________

b) Escribe *horizontal* o *vertical* para justificar la respuesta del ejercicio anterior:

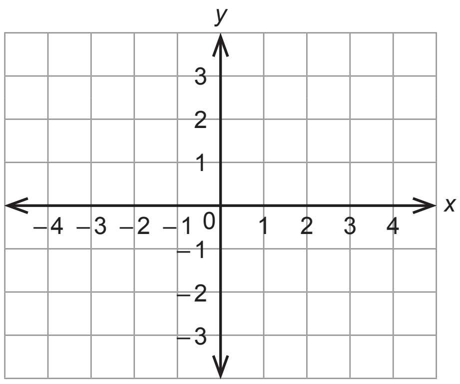
Un punto y su imagen respecto al eje *x* se encuentran en la misma recta _________________.

Los puntos que se encuentran en la misma recta _________________ tienen la misma coordenada *x*.

c) ¿Qué coordenada varía después de la reflexión respecto al eje *x*? ¿Cuál es la variación?

____

d) Usa tus respuestas de *a*) y *c*) para deducir las coordenadas de los puntos después de la reflexión respecto al eje *x*.



D (0; –3) → *D′* (,   )   *E* (–3; –2) → *E′* (,   )

F (–1; 3) → *F′* (,   )   *G* (3,5; 2) → *G′* (,   )

H (2; –2,5) → *H′* (,   )   *I* (1; 0) → *I′* (,   )

e) Representa los puntos del ejercicio anterior para comprobar tus deducciones.

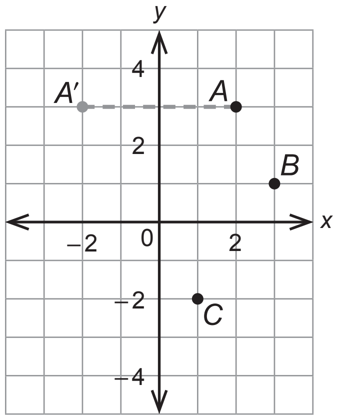
f) Usa las respuestas de *a*) y *b*) para justificar por qué un punto que se encuentra en el eje *x* no se mueve cuando se refleja respecto al eje *x*.

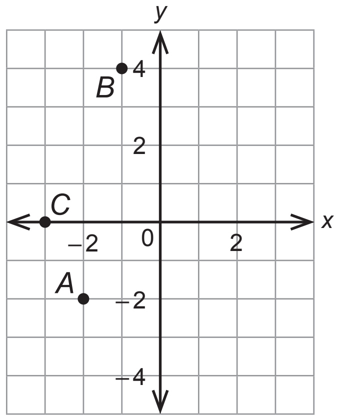
____

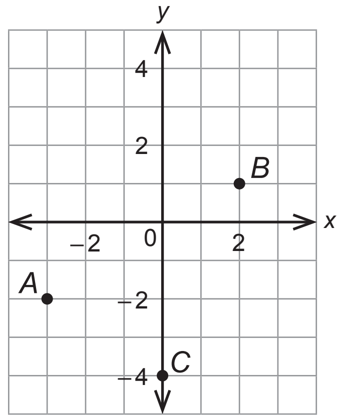
____

____

3. Refleja los puntos *A*, *B* y *C* respecto al eje *y*. Designa a los puntos homólogos *A′*, *B′* y *C′*. Escribe las coordenadas de los puntos originales y de los homólogos.

a) 

b) 

c) 

a)	b)	c)
A (2 , 3) → *A′* (−2 , 3)	*A* (,) → *A′* (,)	*A* (,) → *A′* (,)
B (,) → *B′* (,)	*B* (,) → *B′* (,)	*B* (,) → *B′* (,)
C (,) → *C′* (,)	*C* (,) → *C′* (,)	*C* (,) → *C′* (,)

4. Observa las respuestas del ejercicio 3.

a) ¿Qué coordenada permanece igual después de la reflexión respecto al eje *y*? ________________

b) Escribe *horizontal* o *vertical* para justificar la respuesta del ejercicio anterior:

Un punto y su imagen respecto al eje *y* se encuentran en la misma recta ______________ .

Los puntos que se encuentran en la misma recta ______________ tienen la misma coordenada *y*.

c) ¿Qué coordenada varía después de la reflexión respecto al eje *y*? ¿Cuál es la variación?

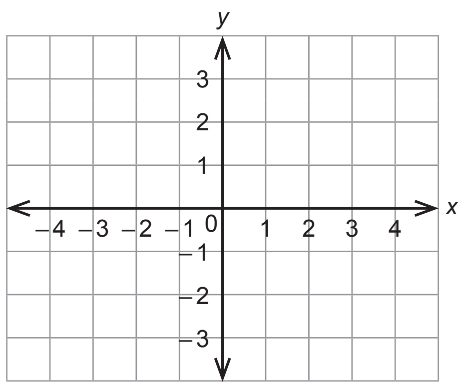
____

d) Usa las respuesta de los ejercicios *a*) y *c*) para deducir las coordenadas de los puntos después de la reflexión respecto al eje *y*.

J (1, 2) → *J′* (,) *K* (3, −3) → *K′* (,)

L (2, 0) → *L′* (,) *M* (−2, −1) → *M′* (,)

$N\left(0, \frac{1}{2}\right)$ → *N′* (,) $O\left(-3, 2\frac{1}{2}\right)$ → *O′* (,)



e) Representa los puntos del ejercicio anterior para comprobar tus deducciones.

f) Usa las respuestas de *a*) y *c*) para justificar por qué un punto que se encuentra en el eje *y* no se mueve cuando se refleja respecto al eje *y*.

g) Tomás cree que cuando un punto se refleja respecto a un eje, los valores absolutos de las coordenadas no cambian. ¿Tiene razón? Justifica tu respuesta usando la palabra *distancia*.

Las reflexiones y las traslaciones son ejemplos de **transformaciones**.

5. Al triángulo 1 se le ha aplicado una reflexión respecto al eje *x*, una reflexión respecto al eje *y* o una traslación del triángulo 1 y se ha obtenido el triángulo 2.

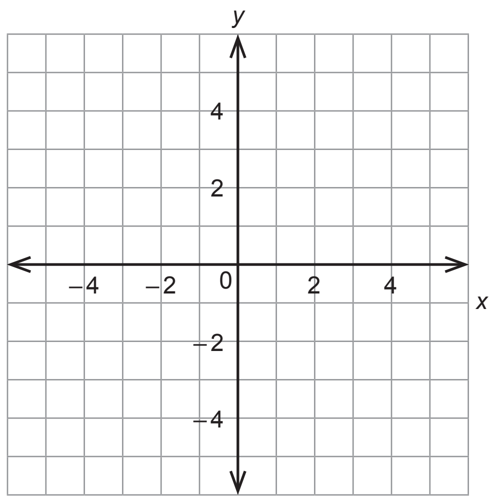
a) Sin representar los triángulos, indica qué transformación se ha aplicado. Indica cuál es el eje de simetría o la dirección y la distancia de la traslación.

i) Triángulo 1: ΔABC, A (3, 1), B (3, 4), C (5, 2)

Triángulo 2: $\Delta A'B'C'$, A' (–3, 1), B' (–3, 4), C' (–5, 2)

$\Delta A'B'C'$ se ha obtenido al aplicar a ΔABC

________________________________.



ii) Triángulo 1: ΔDEF, D (3, –1), E (3, –4), F (5, –2)

Triángulo 2: $\Delta D'E'F'$, D' (–3, –1), E' (–3, –4), F' (–1, –2)

$\Delta D'E'F'$ se ha obtenido al aplicar a ΔDEF

________________________________.

iii) Triángulo 1: ΔABC de *i*), más arriba

Triángulo 2: ΔDEF de *ii*), más arriba

ΔABC se ha obtenido al aplicar a ΔDEF

________________________________.

b) Representa los triángulos en el mismo sistema de coordenadas cartesianas para comprobar las respuestas del ejercicio *a*).

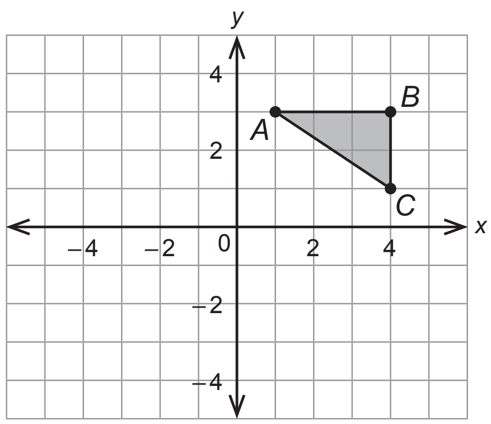
6. a) Refleja ΔABC respecto al eje *x*. Designa al homólogo $\Delta A'B'C'$.

b) Refleja $\Delta A'B'C'$ respecto al eje *y*. Designa al homólogo $\Delta A^*B^*C^*$.

c) Juan cree que $\Delta A^*B^*C^*$ se obtiene al aplicar una traslación a ΔABC. ¿Tiene razón? Justifica tu respuesta.

____

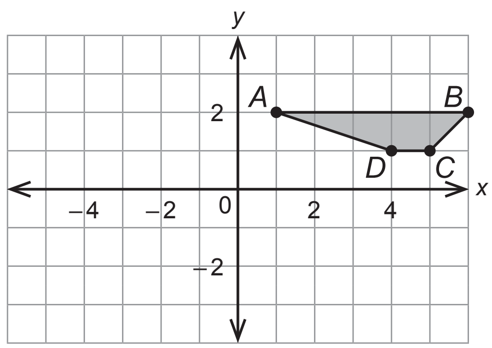
____



7. a) Refleja *ABCD* primero respecto al eje *x* y a continuación, respecto al eje *y*.

b) Refleja *ABCD* primero respecto al eje *x* y a continuación, respecto al eje *y*.

c) ¿Obtienes la misma respuesta en los ejercicios anteriores? Justifica tu respuesta usando las deducciones acerca de la variación en las coordenadas de las reflexiones que has desarrollado en los ejercicios 2 y 4.



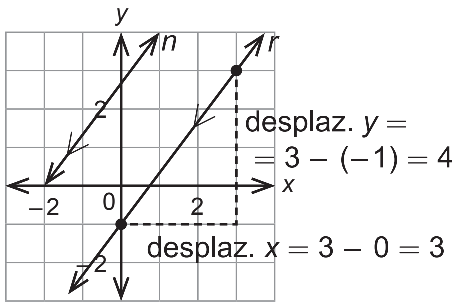
G8-23 Reflejar rectas

RECUERDA: El desplazamiento horizontal es la variación en *x*.
El desplazamiento vertical es la variación en *y*.

La pendiente de una recta es igual a $\dfrac{\text{desplazamiento } y}{\text{desplazamiento } x}$.

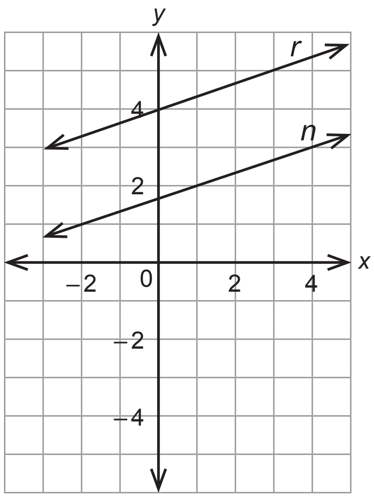
La pendiente de la recta *r* es $\dfrac{4}{3}$.

Las rectas paralelas tienen la misma pendiente. Por tanto, la pendiente de la recta *n* también es $\dfrac{4}{3}$.

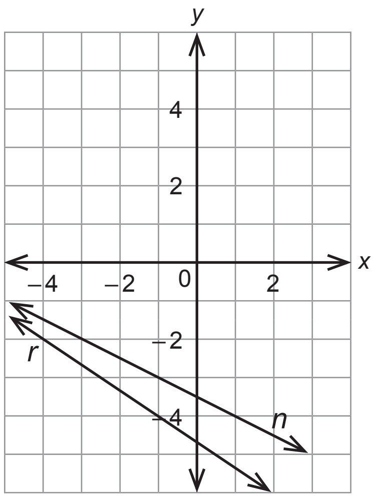


1. a) Encuentra la pendiente de cada recta. Si las rectas son paralelas, señálalas con flechas.

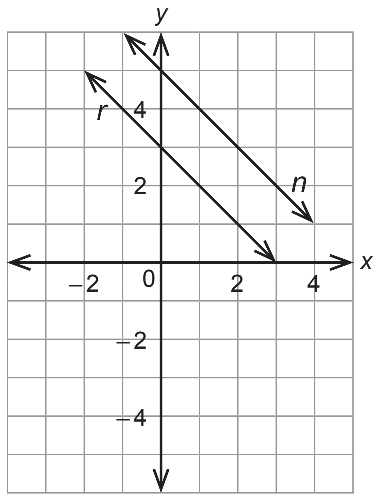
i)



ii)



iii)



pendiente $r =$ | pendiente $r =$ | pendiente $r =$

pendiente $n =$ | pendiente $n =$ | pendiente $n =$

RECUERDA: Para aplicar una reflexión a una recta, seleccionamos 2 de sus puntos y les aplicamos una reflexión. Luego, trazamos una recta nueva que pase por los puntos simétricos.

b) Refleja las rectas del ejercicio *a*) en el eje x. Designa a las rectas homólogas r′ y n′.

c) Encuentra las pendientes de las rectas simétricas. Si las rectas simétricas son paralelas, señálalas con flechas.

i) pendiente $r' =$ ii) pendiente $r' =$ iii) pendiente $r' =$

pendiente $n' =$ pendiente $n' =$ pendiente $n' =$

d) ¿La reflexión respecto al eje *x* transforma rectas paralelas en rectas paralelas? ___________

¿La reflexión respecto al eje *x* transforma rectas que no son paralelas en rectas paralelas? _______

e) ¿Cómo cambia la pendiente de una recta una reflexión respecto al eje *x*? _____________________

f) Usa tu respuesta de *e*) para justificar la respuesta del ejercicio *d*)

ESP_2ESO-2_LA_XILE_p1-84.indd 45 10/2/20 22:51

2. a) Encuentra el desplazamiento vertical, el desplazamiento horizontal y la pendiente de las rectas *AB* y *CD*.

A (4, −1), B (1, 3)

desplaz. y = ___________ = ______

desplaz. x = ___________ = ______

pendiente =

C (−2, 0), D (−5, 4)

desplaz. y = ___________ = ______

desplaz. x = ___________ = ______

pendiente =

b) ¿Las rectas *AB* y *CD* son paralelas? ___________

RECUERDA: Cuando una recta se refleja respecto al eje *y*, la coordenada *x* cambia de signo (+ o −) y la coordenada *y* permanece igual.

c) Aplica una reflexión respecto al eje *y* de los puntos *A*, *B*, *C* y *D* y encuentra las coordenadas de sus simétricos.

A' (,   ), B' (,   ) C' (,   ), D' (,   )

d) Encuentra el desplazamiento vertical, el desplazamiento horizontal y la pendiente de las rectas $A'B'$ y $C'D'$.

desplaz. y $A'B'$ = ___________ = ______

desplaz. x $A'B'$ = ___________ = ______

pendiente $A'B'$ =

desplaz. y $C'D'$ = ___________ = ______

desplaz. x $C'D'$ = ___________ = ______

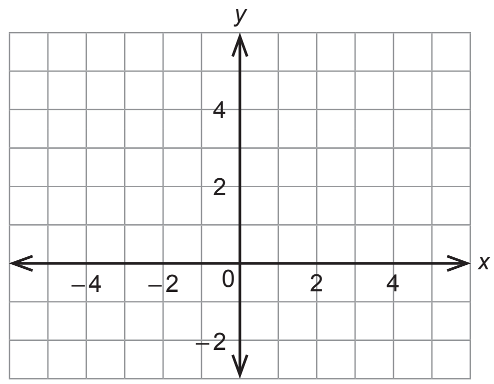
pendiente $C'D'$ =

e) ¿Las rectas $A'B'$ y $C'D'$ son paralelas?

f) Representa las rectas *AB*, *CD*, $A'B'$ y $C'D'$. A continuación, comprueba tu respuesta anterior.

g) ¿La reflexión respecto al eje *y* transforma rectas paralelas en rectas paralelas? _________

Extra ▶ ¿La reflexión respecto al eje *y* puede transformar un par de rectas que no son paralelas en un par de rectas paralelas? ¿Por qué?



Si la coordenada *y* de todos los puntos de una recta es igual a 2, su ecuación es $y = 2$.
Es una recta horizontal.

3. a) Escribe las coordenadas de dos puntos de la recta $y = 3$.

b) Usa los puntos de *a*) para encontrar la pendiente de la recta $y = 3$.

c) Si reflejas la recta respecto al eje *y*, ¿cómo varían las coordenadas de los dos puntos? ¿Cómo cambia la pendiente de la recta?

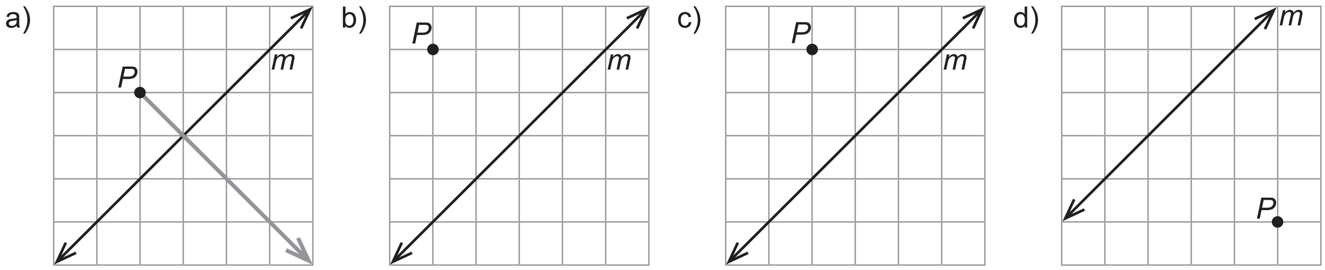
d) Deduce la ecuación de la recta homóloga $y = 3$ al reflejarla respecto al eje *y*.

e) Deduce la ecuación de la recta homóloga $y = 3$ al reflejarla respecto al eje *x*.

f) Dibuja un sistema de coordenadas cartesianas y comprueba tus deducciones.

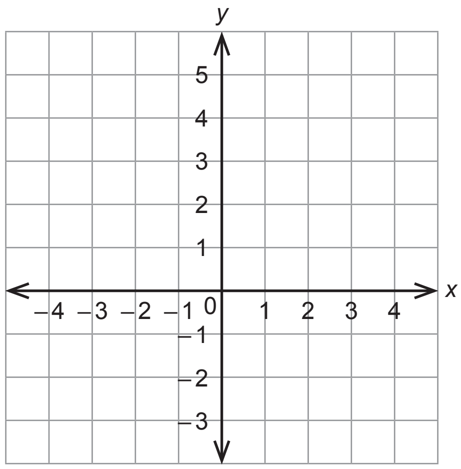
G8-24 Reflexiones en rectas que no son ejes

1. Traza una semirrecta con extremo en *P* perpendicular a la recta *m*.



En los puntos (–1, –1), (0, 0) y (2, 2), la coordenada *x* es igual a la coordenada *y*. Todos pertenecen a la misma recta. La ecuación de dicha recta es $y = x$.

2. a) Representa los puntos (–1, –1), (0, 0), (1, 1) y (2, 2). Traza una recta que pase por estos puntos y alárgala para que ocupe toda la cuadrícula.



b) Escribe las coordenadas de dos puntos más de la recta $y = x$

(,) (,)

Representa los puntos para comprobar tu deducción.

c) Representa los puntos en el sistema de coordenadas cartesianas.

A (4, –1), *B* (1, 3), *C* (–2, 0), *D* (–1, –3), *E* (4, 2)

d) Refleja los puntos de *c*) respecto a la recta $y = x$.
Escribe las coordenadas de los simétricos en la tabla.

Punto	*A* (4, –1)	*B* (1, 3)	*C* (–2, 0)	*D* (–1, –3)	*E* (4, 2)
Simétrico					

e) Describe cómo cambian las coordenadas de un punto después de aplicarle una reflexión respecto a la recta $y = x$.

____

f) Usa la respuesta del ejercicio *e*) para justificar por qué un punto de la recta $y = x$ no cambia al aplicarle una reflexión respecto a la recta $y = x$.

Extra ▶ Usa la respuesta de *e*) para justificar por qué un punto que se encuentra en el segundo cuadrante del sistema de coordenadas cartesianas se refleja en el cuarto cuadrante. ¿Por qué los puntos del primer cuadrante y del tercero permanecen en el primer cuadrante y en el tercero?

Extra ▶ Representa *A* (–4, 3), *B* (–2, 4) y *C* (–1, 1) en un sistema de coordenadas cartesianas para construir un triángulo.

a) Aplica una reflexión respecto al eje *x* a ΔABC. Designa $\Delta A'B'C'$ al homólogo.

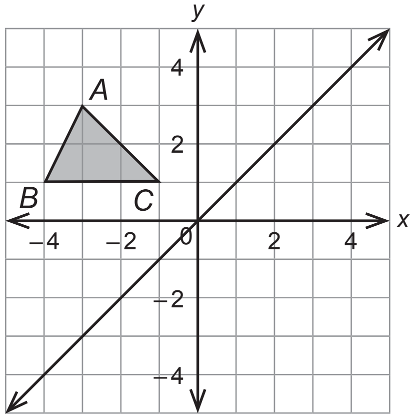
b) Aplica una reflexión respecto al eje *y* a $\Delta A'B'C'$. Designa $\Delta A^*B^*C^*$ al homólogo.

c) María cree que obtenemos $\Delta A^*B^*C^*$ al aplicar una reflexión respecto a la recta $y = x$ a ΔABC. ¿Tiene razón? Justifica tu respuesta usando la respuesta del ejercicio *2 e*).

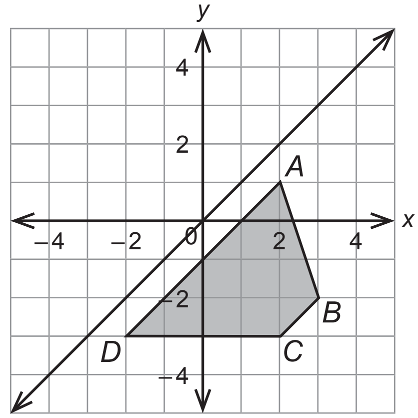
3. a) Encuentra las coordenadas de los vértices de las siguientes figuras.

b) Deduce las coordenadas de los vértices homólogos al aplicar una reflexión respecto a la recta $y = x$.

i)



ii)



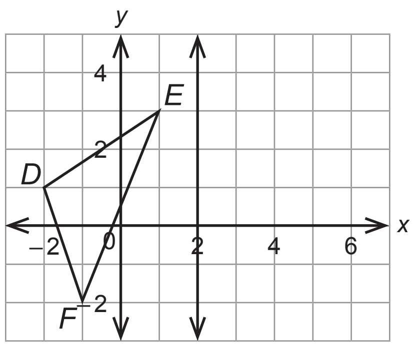
i)
A (,) → A' (,)
B (,) → B' (,)
C (,) → C' (,)

ii)
A (,) → A' (,)
B (,) → B' (,)
C (,) → C' (,)
D (,) → D' (,)

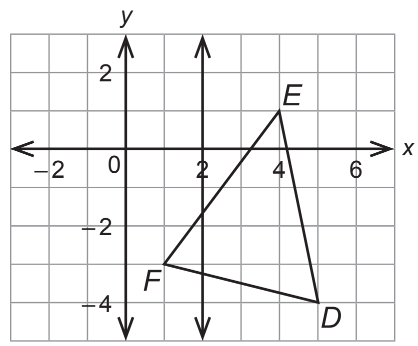
c) Aplica una reflexión a las figuras anteriores reflejando los vértices respecto a la recta $y = x$. Comprueba tus respuestas de *b*).

4. a) Aplica una reflexión respecto a la recta vertical $x = 2$ a los triángulos. Escribe las coordenadas de los vértices.

i)



ii)



i)
D (,) → D' (,)
E (,) → E' (,)
F (,) → F' (,)

ii)
D (,) → D' (,)
E (,) → E' (,)
F (,) → F' (,)

b) Traza un segmento de cada vértice de *a*) a su homólogo. ¿Qué observas acerca de

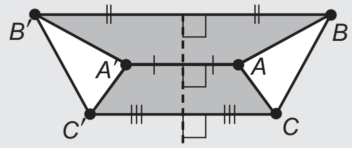
los segmentos? ____

El **punto medio** de un segmento es el punto que equidista de sus dos extremos.

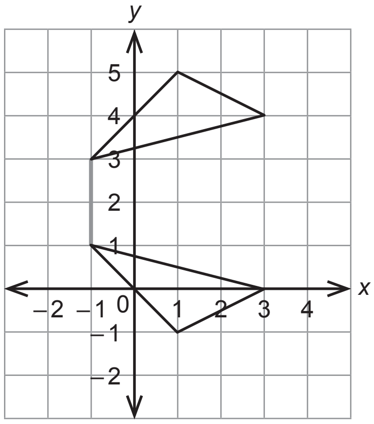
c) Marca los puntos medios de los segmentos que has trazado en *b*) en los sistemas de coordenadas cartesianas anteriores.

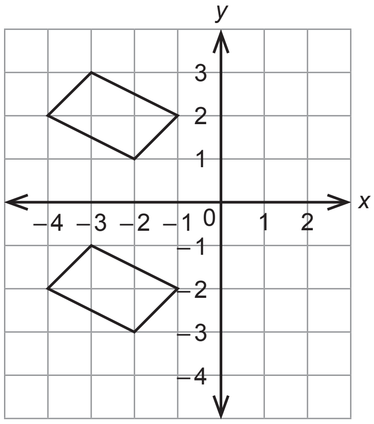
Las figuras *ABC* y *A′B′C′* son simétricas si:
- Los segmentos que unen cada vértice con su homólogo son paralelos.
- Los puntos medios de estos segmentos pertenecen a la misma recta perpendicular.

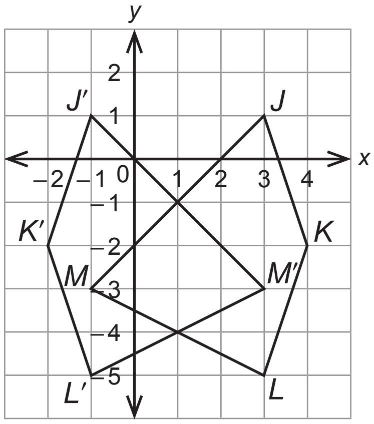
Nota: Los segmentos que unen los vértices con sus homólogos tienen longitudes distintas.



5. a) Traza segmentos entre los vértices de las figuras y sus homólogos.

i) 

ii) 

iii) 

b) Encuentra el punto medio de los segmentos trazados en *a*). ¿Los puntos medios pertenecen a la misma recta?

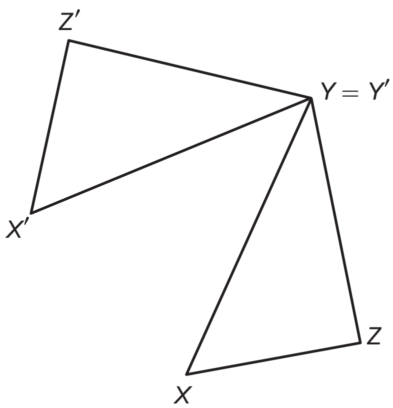
c) ¿Las figuras son simétricas la una de la otra? Si es así, formula la ecuación del eje de simetría. Si no es así, escribe *no*.

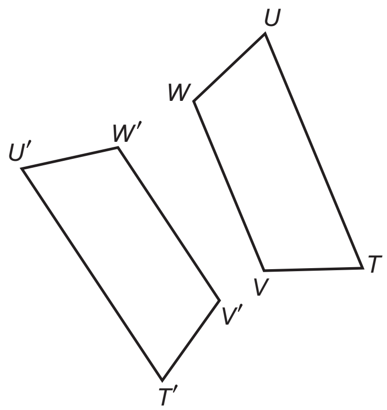
Extra ▶ Para el par de figuras acerca del cual has respondido *no* en *c*), identifica la transformación aplicada.

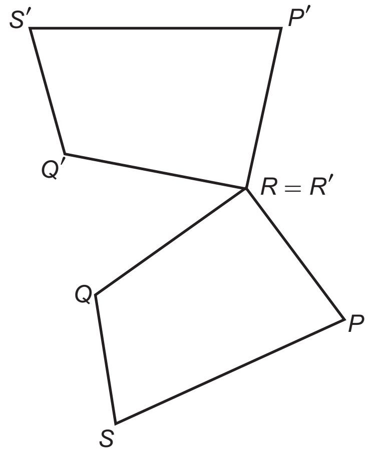
6. Completa la tabla para resumir lo que le sucede a una figura simétrica. ¿Qué sucede si se traslada una figura?

Transformación	Longitud de los lados	Amplitud de los ángulos	Orientación
Reflexión			
Traslación			

7. Las figuras son simétricas las unas de las otras. Usa una regla y un transportador para encontrar el eje de simetría.

a) 

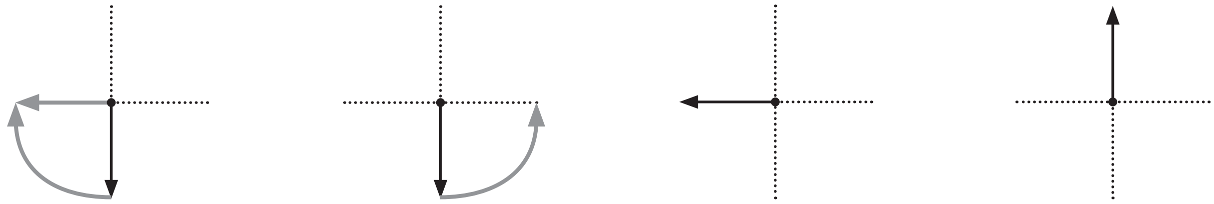
b) 

c) 

G8-25 Rotaciones

1. A partir de la flecha en negrita, dibuja un arco que muestre el giro indicado.

a) 90° en sentido horario b) 90° en sentido antihorario c) 90° en sentido horario d) 90° en sentido antihorario

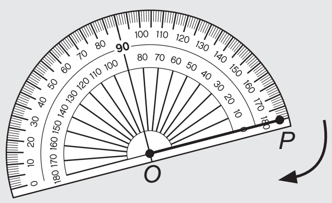


Para aplicar una **rotación** o un **giro** al punto P alrededor del punto O y un ángulo de 60° en sentido horario:

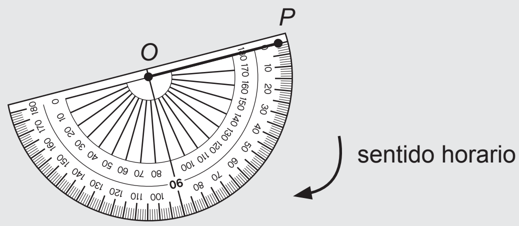
Paso 1: Trazamos un segmento OP. Medimos su longitud.

Paso 2: Dibujamos una flecha desde P en sentido horario.

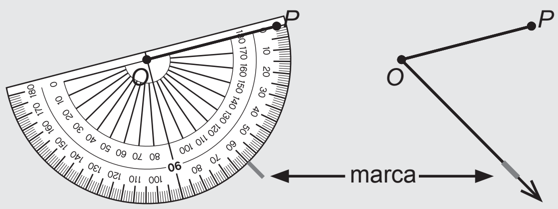
Paso 3: Colocamos el centro del transportador en el punto O y la base alineada con OP.



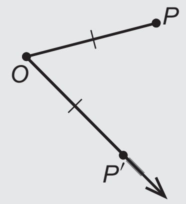
Paso 4: ¿El 0 de la escala que cuenta en sentido horario está sobre el segmento? Si no es así, dar la vuelta al transportador.



Paso 5: Hacemos una marca en los 60° de la escala que cuenta en sentido horario. Quitamos el transportador y trazamos una semirrecta que una la marca y O.



Paso 6: En la semirrecta nueva, medimos y marcamos el punto homólogo P' de modo que $OP' = OP$.



2. Aplica una rotación alrededor del punto O y con el ángulo y sentido indicados en el punto P.

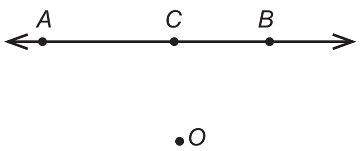
a) 60° en sentido horario b) 20° en sentido antihorario c) 150° en sentido antihorario d) 180° en sentido horario

3. Para los puntos O y P del ejercicio 2, ¿qué rotación con centro en O y sentido opuesto transforma el punto P en el mismo homólogo?

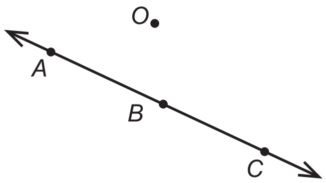
a) ________________ b) ________________ c) ________________ d) ________________

4. a) Aplica un giro alrededor del punto O y sentido horario (SH) o antihorario (SAH) según las indicaciones, a los puntos A y C. Designa a sus homólogos A' y B'. Traza la recta $A'C'$.

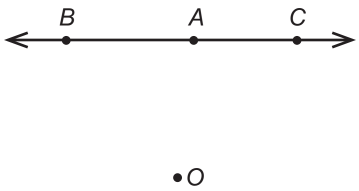
i) 170° SH



ii) 25° SAH



iii) 90° SH



b) En el ejercicio *a*), el punto B pertenece a la recta AC. En cada caso, aplica una rotación al punto B con centro en el punto O, tal y como has hecho con los puntos A y C. Designa a los homólogos B' ¿Pertenece B' a la recta $A'C'$?

i) ___________ ii) ___________ iii) ___________

c) ¿Las rotaciones transforman rectas en otras rectas? ___________

d) Compara el orden de los puntos A, B y C en la recta AC con el orden de los puntos A', B' y C' en la recta $A'C'$. ¿Las rotaciones conservan el orden de los puntos en una recta? ___________

Para aplicar una rotación o un giro alrededor del punto O, aplicamos la rotación a los vértices de la figura y unimos los vértices homólogos.

El punto O se llama **centro de rotación**. El centro de rotación puede estar dentro, fuera o sobre el perímetro de la figura. El centro de rotación es el único **punto fijo** de una rotación: no se mueve.

5. a) Aplica una rotación de 90° en sentido horario con centro en el punto dado al siguiente triángulo.

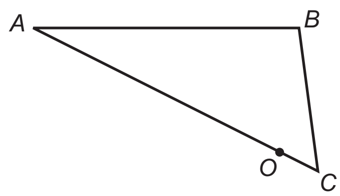
i) Punto O; usa ′ para designar al homólogo.

ii) Punto B; usa * para designar al homólogo.

b) ¿Parecen congruentes $\Delta A'B'C'$ y $\Delta A^*B^*C^*$? ___________

c) ¿En qué se diferencian $\Delta A'B'C'$ y $\Delta A^*B^*C^*$: en la ubicación, en la orientación o en ambas cosas?

____

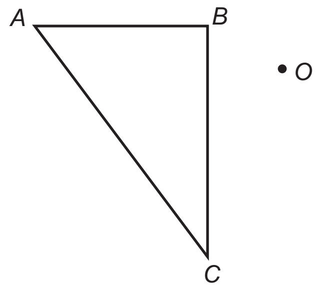


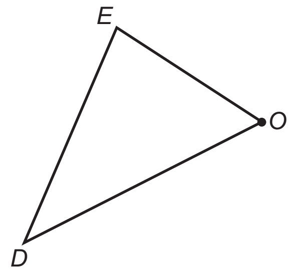
d) ¿Qué transformación convierte $\Delta A'B'C'$ en $\Delta A^*B^*C^*$? Indica el eje de simetría o el vector de traslación.

____

Extra ▶ Escoge un punto interior a ΔABC y llámalo P. Aplica a ΔABC un giro de 90° en sentido horario con centro en el punto P para obtener $\Delta A''B''C''$. ¿Son $\Delta A''B''C''$ y $\Delta A'B'C'$ congruentes? ¿Y $\Delta A''B''C''$ y $\Delta A^*B^*C^*$? ¿Qué transformación convierte $\Delta A''B''C''$ en cada uno de los otros dos triángulos?

6. a) Mide los lados de los triángulos.

i) 

ii) 

$AB =$ ___________ $DE =$ ___________

$AC =$ ___________ $EO =$ ___________

$BC =$ ___________ $DO =$ ___________

b) Aplica a cada triángulo un giro de 120° en sentido antihorario con centro en *O*. Usa ′ para señalar los vértices de la imagen.

c) Mide los lados de los homólogos.

i) $A'B' =$ ___________ ii) $D'E' =$ ___________

$A'C' =$ ___________ $E'O' =$ ___________

$B'C' =$ ___________ $D'O' =$ ___________

d) Los lados de los triángulos son segmentos. ¿La rotación conserva la longitud de los segmentos? ________________

e) Mide los ángulos de los triángulos.

i) $\angle A =$ ______, $\angle B =$ ______, $\angle C =$ ______ ii) $\angle D =$ ______, $\angle E =$ ______, $\angle O =$ ______

$\angle A' =$ ______, $\angle B' =$ ______, $\angle C' =$ ______ $\angle D' =$ ______, $\angle E' =$ ______, $\angle O' =$ ______

f) ¿Qué observas acerca de los ángulos de cada triángulo y su homólogo? ______________________

¿La rotación conserva el tamaño de los ángulos? ___________

7. ¿Verdadero o falso? Si la afirmación es verdadera, justifica por qué. Si la afirmación es falsa, dibuja un contraejemplo.

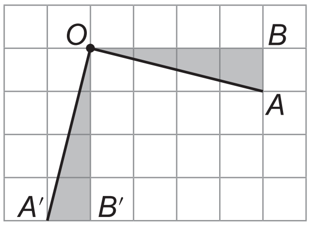
a) Un triángulo y su homólogo rotado son congruentes.

b) Si dos triángulos son congruentes, siempre hay una rotación que transforma un triángulo en el otro.

Extra ▶ Usa una regla para dibujar un triángulo *ABC*. Encuentra el punto medio del lado AC y desígnalo *M*. Aplica a ΔABC un giro de 180° en sentido horario con centro en el punto *M*. ¿Qué tipo de cuadrilátero forman Δ *ABC* y su homólogo? Justifica tu respuesta.

G8-26 Rotaciones de 90° en una cuadrícula

1. a) ¿Qué lados y qué ángulo de $\Delta\, OA'B'$ son iguales a los siguientes lados y al siguiente ángulo de $\Delta\, OAB$?



$OB =$ ________ $AB =$ ________ $\angle ABO =$ ___________

¿Qué puedes afirmar acerca de $\Delta\, OA'B'$ y $\Delta\, OAB$? ________________

b) ¿Qué puedes afirmar acerca de $\Delta\, AOB$ y $\Delta\, A'OB'$? ________________

c) ¿Cuántos grados mide $\angle BOB'$? $\angle BOB' =$ ______

d) Usa el dibujo y tus respuestas de *b*) y *c*) para completar los espacios en blanco.

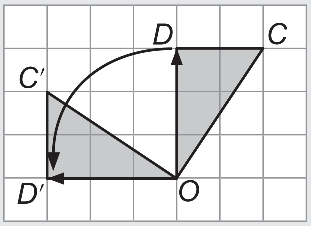
$\angle A'OA = \angle$______ $+ \angle$______ $=$

$= \angle AOB + \angle$______ $=$

$= \angle$______ $=$ ______°

e) ¿Qué transformación convierte $\Delta\, OAB$ en $\Delta\, OA'B'$? ___________________________

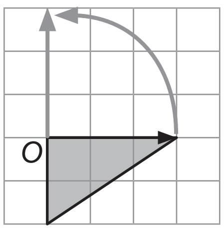
Podemos aplicar una rotación de 90° a un triángulo usando una cuadrícula en lugar de un transportador.

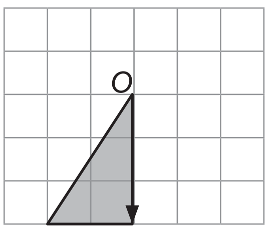


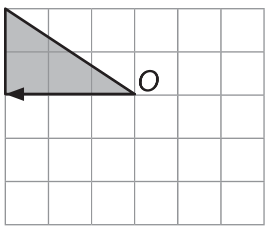
Los lados del triángulo *OCD* miden: 2 unidades en horizontal, 3 unidades en vertical. Las rotaciones transforman triángulos en triángulos congruentes. Una rotación de 90° transforma rectas horizontales en rectas verticales y rectas verticales en rectas horizontales.

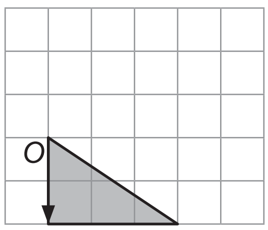
Los lados del triángulo *OC′D′* miden: 2 unidades en vertical, 3 unidades en horizontal.

2. Aplica a los triángulos un giro de 90° en sentido antihorario y centro en el punto *O*. Empieza por el lado que está marcado con una flecha. Pista: Primero, ten en cuenta el sentido.

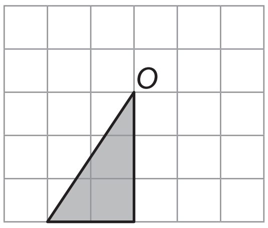
a) 

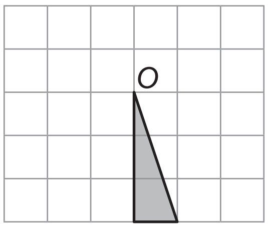
b) 

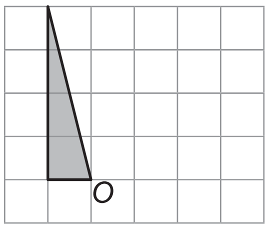
c) 

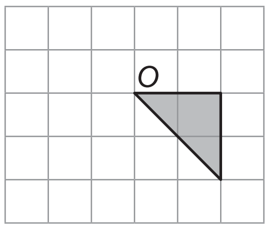
d) 

3. Aplica a los triángulos una rotación de 90° en sentido horario y centro en el punto *O*. Empieza por el lado horizontal o vertical adyacente al punto *O.*

a) 

b) 

c) 

d) 

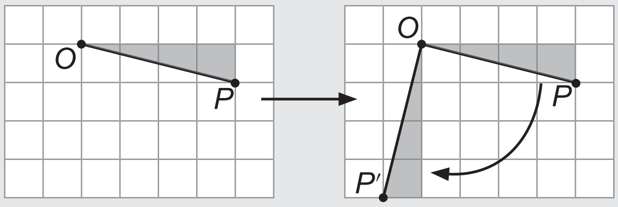
ESP_2ESO-2_LA_XILE_p1-84.indd 53 10/2/20 22:51

Para aplicar a un segmento oblicuo *OP* una rotación de 90° en sentido horario y centro en el extremo *O* en una cuadrícula:

Paso 1: Sombreamos un triángulo rectángulo con hipotenusa *OP*.

Paso 2: Rotamos el triángulo 90° en sentido horario y centro en *O*.

Paso 3: Designamos al segmento homólogo *OP′*.



4. Maribel quiere aplicar al punto *P* (2, 3) un giro de 90° en sentido horario y centro en el origen.

a) ¿En qué cuadrante del sistema de coordenadas cartesianas se encuentra *P*? ______

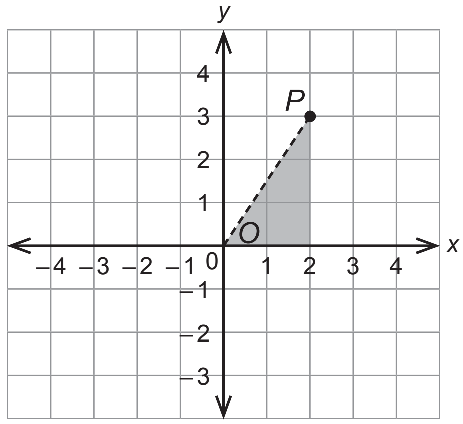
b) ¿En qué cuadrante deduces que se estará el homólogo *P′*? ____

c) Maribel traza el segmento *OP* y sombrea un triángulo rectángulo. Rota *OP* 90° en sentido horario con centro en el origen. Señala *P′*.

d) El desplazamiento horizontal de *OP* es 2 y el vertical, 3.

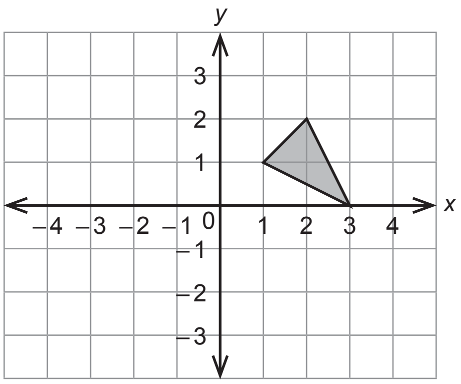
El desplazamiento horizontal de *OP′* es ____ y el vertical, ____.

e) Las coordenadas de *P′* son (,   ).

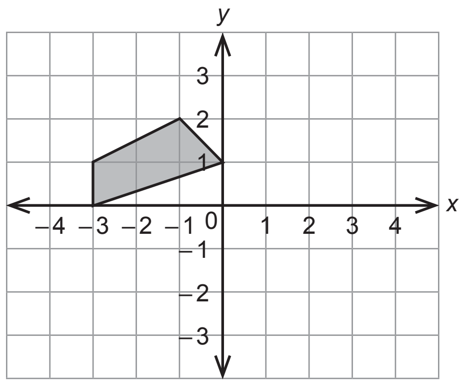


5. Usa el método de Maribel del ejercicio 4 para aplicar una rotación con centro en el origen a los vértices del polígono.Une los vértices para construir el polígono homólogo.

a) 90° en sentido antihorario



b) 90° en sentido horario



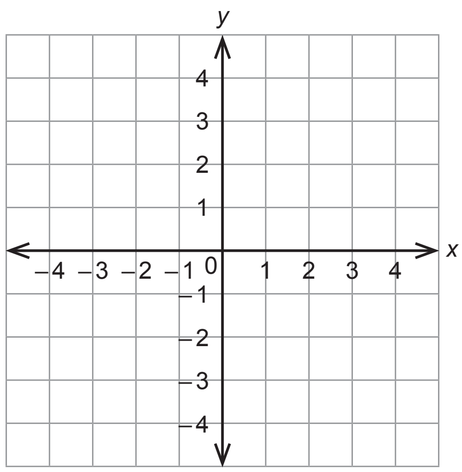
6. a) Deduce las coordenadas de los puntos *L* (–3, –3), *M* (–3, –3) y *N* (–3, 1) tras aplicar estos giros con centro en el origen.

i) 90° SH: *L′* (,   ), *M′* (,   ), *N′* (,   )

ii) 90° SAH: *L** (,   ), *M** (,   ), *N** (,   )

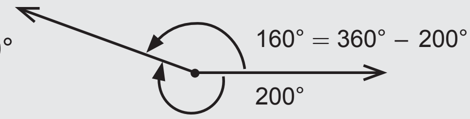
b) Representa los puntos, rótalos y comprueba tus deducciones.

Extra ▶ ¿Qué transformación convierte Δ *L′M′N′* en Δ *L*M*N**? Justifica tu respuesta.



G8-27 Más rotaciones en una cuadrícula

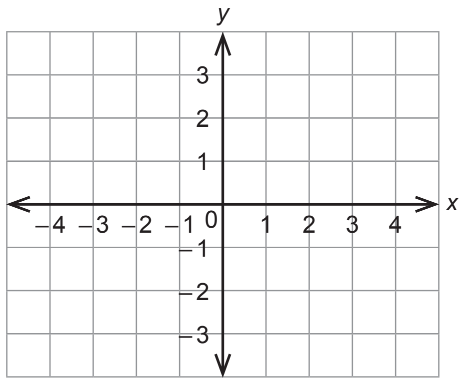
Un giro completo mide 360°. Un giro de 200° en sentido horario (SH) da como resultado la misma figura que una rotación de 160° en sentido antihorario (SAH) con centro en el mismo punto.



1. Se aplica al punto *P* un giro en sentido antihorario con centro en *O*. ¿Qué rotación en sentido horario con centro en *O* da como resultado la misma figura que esta rotación?

a) 240° SAH ________ b) 180° SAH ________ c) 25° SAH ________ d) 359° SAH ________

2. Representa el punto *Q* (−2, −3) y aplícale un giro con centro en el origen según las indicaciones. Escribe las coordenadas del homólogo.

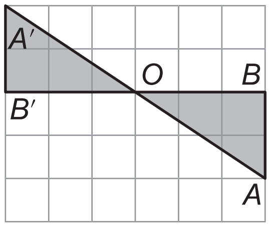


a) 270° en sentido horario; *Q′* (,   )

b) 270° en sentido antihorario; *Q** (,   )

c) ¿Qué rotación con centro en el origen transforma el punto *Q′* en el punto *Q**? ____________________________

3. El triángulo *A′OB′* es el resultado de aplicar una rotación con centro en O a ∆*AOB*.



a) ¿Cuántos grados mide ∠*BOB′*? ∠*BOB′* = ______

b) ¿Cuántos grados mide ∠*AOA′*? ∠*AOA′* = ______

c) ¿Qué rotación transforma ∆*AOB* en ∆*A′OB′*? ______________________

d) El lado horizontal de ∆*AOB* mide ______ unidades y su lado vertical mide ______ unidades.

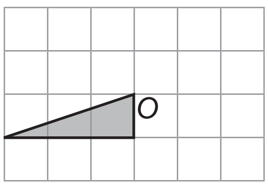
El lado horizontal de ∆*A′OB′* mide ______ unidades y su lado vertical mide ______ unidades.

e) Escribe *horizontal* o *vertical* para completar la afirmación:
Una rotación de 180° en sentido horario o en sentido antihorario transforma rectas horizontales en rectas _________________ y rectas verticales en rectas _________________.

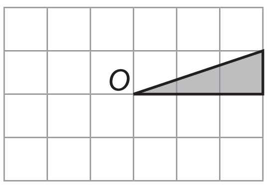
f) Explica por qué una rotación de 180° en sentido horario da el mismo resultado que una rotación de 180° alrededor del mismo centro en sentido antihorario.

4. Aplica a los triángulos una rotación de 180° en sentido horario o antihorario y centro en *O*. Empieza por el lado horizontal o el vertical.

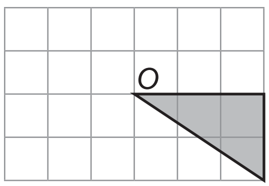
a)



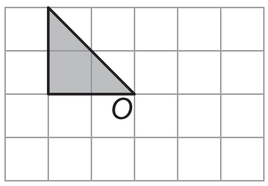
b)



c)



d)

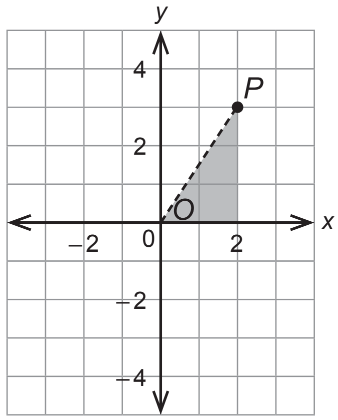


5. Álex quiere aplicar al punto *P* (2, 3) un giro de 180° en sentido horario y centro en el origen *O*.

a) ¿En qué cuadrante se encuentra *P*? ______

b) ¿En qué cuadrante se encuentra el homólogo *P′*? ______

c) Álex traza el segmento *OP* y sombrea un triángulo rectángulo.
Rota *OP* 180° en sentido horario alrededor del origen.
Designa al homólogo *P′*.



d) El desplazamiento horizontal de *OP* es 2 y el vertical, 3.

El desplazamiento horizontal de *OP′* es ______ y el vertical, ______.

e) Las coordenadas de *P′* son (,   ).

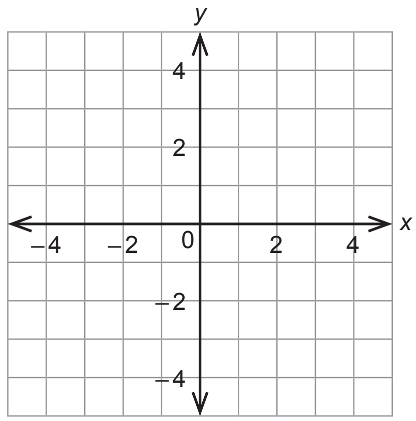
6. a) Representa el punto en el sistema de coordenadas cartesianas y aplícale un giro alrededor del origen según las indicaciones. Escribe las coordenadas del homólogo.

i) *P* (–3, 1), 180° en sentido horario; *P′* (,   )

ii) *Q* (4, –2), 180° en sentido antihorario; *Q′* (,   )

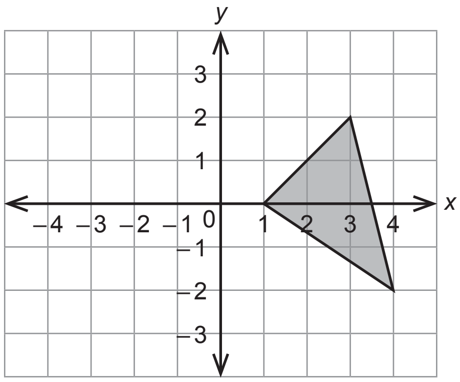
b) Deduce las coordenadas de los homólogos de los puntos después de una rotación de 180° alrededor del origen. Representa los puntos y sus homólogos y comprueba tu deducción

R (–2, 0), *R′* (,   )   *S* (4; 0,5), *S′* (,   )

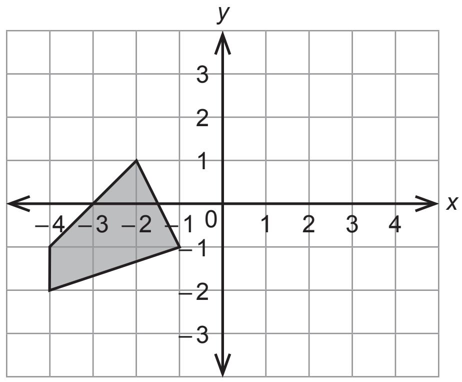


7. Usa el método de Álex del ejercicio 5 para aplicar a los vértices del polígono un giro de 180° en sentido horario alrededor del origen. Une los vértices para crear el homólogo del polígono.

a)



b)



8. a) Representa el punto *P* (4, 2) en un sistema de coordenadas cartesianas.

b) Aplica un giro al punto con centro en el origen según las indicaciones. Escribe las coordenadas del homólogo.

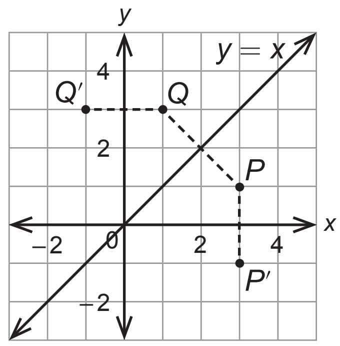
i) *P* → *P′*: 90° en SH   ii) *P′* → *P′*: 180° en SH   iii) *P′* → *P**: 270° en SH

c) El punto *P′* se obtiene al aplicar a *P* un giro de ______° en sentido horario y centro en el origen.

d) El punto *P** se obtiene al aplicar a *P* un giro con centro en el origen de 90° + 180° + 270° – 360° =
= ______° en sentido horario. Explica qué significa cada uno de los números de esta operación.

RECUERDA: En la gráfica:

- Los puntos P (3, 1) y P' (3, −1) son simétricos respecto al eje x. Tienen la misma coordenada x y sus coordenadas y son opuestas.
- Los puntos Q (1, 3) y Q' (−1, 3) son simétricos respecto al eje y. Sus coordenadas x son opuestas y tienen la misma coordenada y.
- Los puntos P y Q son simétricos respecto a la recta $y = x$. Sus coordenadas x e y se intercambian de un punto al otro.



9. a) Aplica a $\Delta\, UVW$ una reflexión respecto al eje x. Escribe las coordenadas de los vértices del homólogo.

U' (,), V' (,), W' (,)

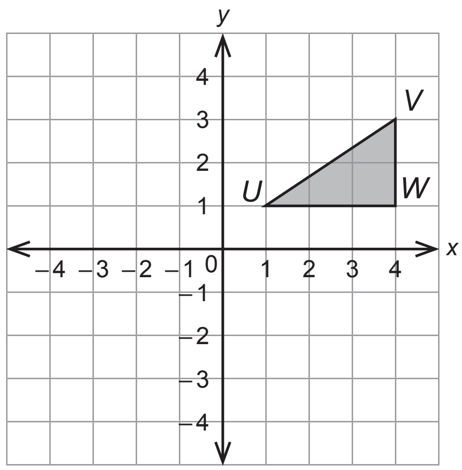
b) Aplica a $\Delta\, U'V'W'$ una reflexión al eje y. Escribe las coordenadas de los vértices del homólogo.

U^* (,), V^* (,), W^* (,)

c) ¿Qué transformación convierte $\Delta\, UVW$ en $\Delta\, U^*V^*W^*$?

____

d) Aplica a $\Delta\, UVW$ una reflexión al eje y. A continuación, refleja el homólogo respecto al eje x. ¿Obtienes $\Delta\, U^*V^*W^*$? _________



Extra ▶ Usa las variaciones en las coordenadas para justificar las respuestas de *c*) y *d*).

10. a) Aplica a $\Delta\, RST$ una reflexión al eje x. Escribe las coordenadas de los vértices del homólogo.

R' (,), S' (,), T' (,)

b) Aplica a $\Delta\, R'S'T'$ una reflexión a la recta $y = x$. Escribe las coordenadas de los vértices del homólogo.

R' (,), S' (,), T' (,)

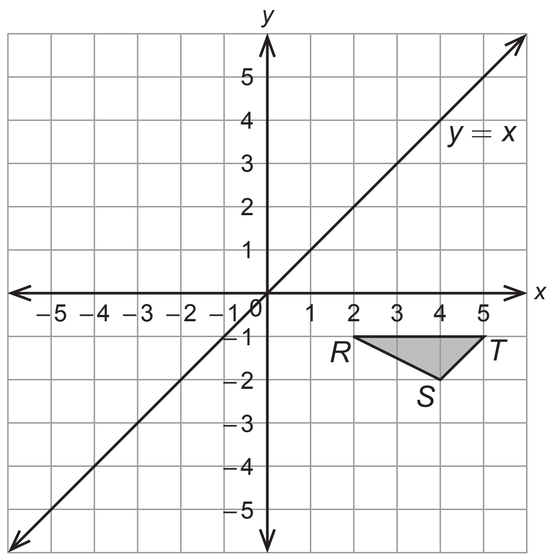
c) ¿Qué transformación convierte $\Delta\, RST$ en $\Delta\, R''S''T''$?

____

d) Aplica a $\Delta\, RST$ una reflexión a la recta $y = x$ y marca los puntos homólogos con *. Después, refleja el homólogo respecto al eje x. Marca los homólogos con **. Escribe las coordenadas de los vértices:

R^{**} (,), S^{**} (,), T^{**} (,)

¿Es igual a $\Delta\, R''S''T''$? _______

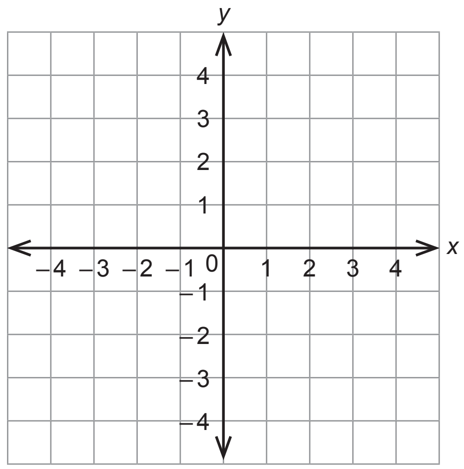


ESP_2ESO-2_LA_XILE_p1-84.indd 57 10/2/20 22:51

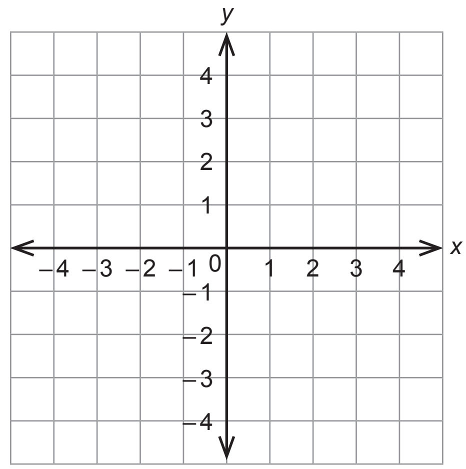
G8-28 Rotación de rectas

1. a) Representa los puntos en los sistemas de coordenadas cartesianas y traza las rectas *PQ* y *ST*.

i) *P* (−3, 2), *Q* (−1, 3), *S* (0, −3), *T* (4, −1)



ii) *P* (2, −3), *Q* (−4, −1), *S* (−1, 0), *T* (2, −1)



b) Encuentra la pendiente de las rectas *PQ* y *ST. Simplifica los resultados.*

i) desplaz. *y PQ* = ____ desplaz. *x PQ* = ____

pendiente *PQ* =

desplaz. *y ST* = ____desplaz. *x ST* = ____

pendiente *ST* =

ii) desplaz. *y PQ* = ____ desplaz. *x PQ* = ____

pendiente *PQ* =

desplaz. *y ST* = ____ desplaz. *x ST* = ____

pendiente *ST* =

c) ¿Es *PQ* paralela a *ST*?

i) ________ ii) ________

d) Aplica a las rectas *PQ* y *ST* una rotación con centro en el origen según las indicaciones. Usa ′ para señalar las homólogas.

i) 90° en sentido horario ii) 180° en sentido antihorario

e) Encuentra la pendiente de las rectas *P′Q′* y *S′T′*. Simplifica los resultados.

i) desplaz. *y P′Q′* = ____ desplaz. *x P′Q′* = ____

pendiente *P′Q′* =

desplaz. *y S′T′* = ____ desplaz. *x S′T′* = ____

pendiente *S′T′* =

ii) desplaz. *y P′Q′* = ____ desplaz. *x P′Q′* = ___

pendiente *P′Q′* =

desplaz. *y S′T′* = ____ desplaz. *x S′T′* = ___

pendiente *S′T′* =

f) ¿Es *P′Q′* paralela a *S′T′*?

i) ________ ii) ________

g) ¿Las rotaciones alrededor del origen transforman rectas paralelas en rectas paralelas? _________

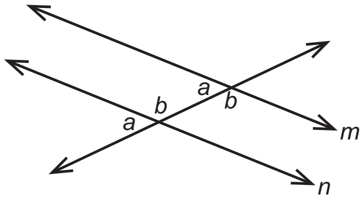
RECUERDA: Los ángulos correspondientes y los ángulos alternos de rectas paralelas son iguales. Si los ángulos correspondientes o los ángulos alternos son iguales, las rectas son paralelas.

Para comprobar si las rectas *m* y *n* son paralelas:

Paso 1: Trazamos una recta que pase por *m* y por *n*.

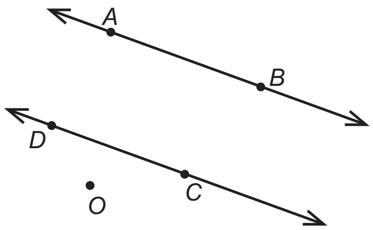
Paso 2: Identificamos un par de ángulos correspondientes (*a*) o alternos (*b*).

Paso 3: Medimos los ángulos del paso 2. Si los ángulos son iguales, las rectas son paralelas. Si no son iguales, las rectas no son paralelas.

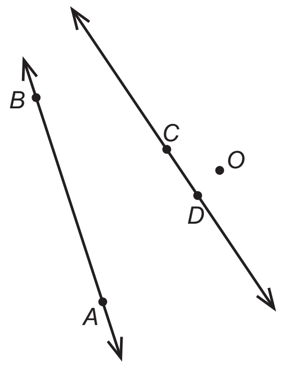


2. a) Traza la recta *AC* y usa los pasos anteriores para comprobar si las rectas *AB* y *CD* son paralelas. Señala las rectas paralelas con flechas.

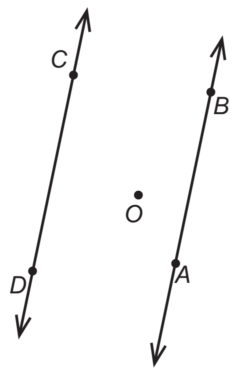
i)



ii)



iii)



b) Aplica a las rectas una rotación con centro en el punto *O* según las indicaciones. Usa los puntos *A*, *B*, *C* y *D*. Usa ′ para señalar las homólogas.

i) 160° en sentido horario   ii) 75° en sentido antihorario   iii) 35° en sentido horario

c) Traza la recta *A′C′*. Comprueba si las rectas *A′B′* y *C′D′* son paralelas. Señala las rectas paralelas con flechas.

d) ¿Las rotaciones transforman rectas paralelas en rectas paralelas? ______

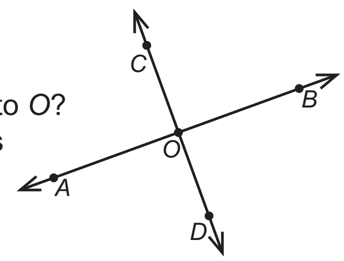
¿Las rotaciones transforman rectas que no son paralelas en rectas paralelas? ______

e) ¿La rotación conserva la amplitud de los ángulos? ______

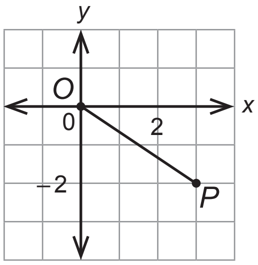
¿La rotación conserva los ángulos alternos? ______

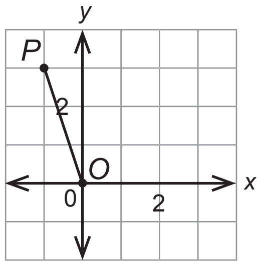
f) Usa tus respuestas del ejercicio anterior para justificar las respuestas del ejercicio *d*).

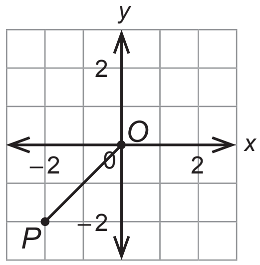
Extra ▶ Dos rectas, *AB* y *CD*, se intersecan en *O*. ¿Qué sucede si se aplica a las dos rectas un giro de 180° en sentido horario alrededor del punto *O*? Usa tus conocimientos sobre las rotaciones para justificar por qué los ángulos opuestos *AOD* y *BOC* son iguales.

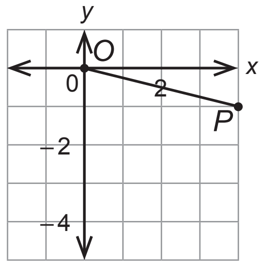


3. a) Aplica a los segmentos un giro de 90° en sentido horario alrededor del origen. Usa ′ para señalar los homólogos.

i)


ii)


iii)


iv)


b) Usa un transportador para comprobar si el ángulo entre *OP* y su homólogo *O′P′* mide 90°.

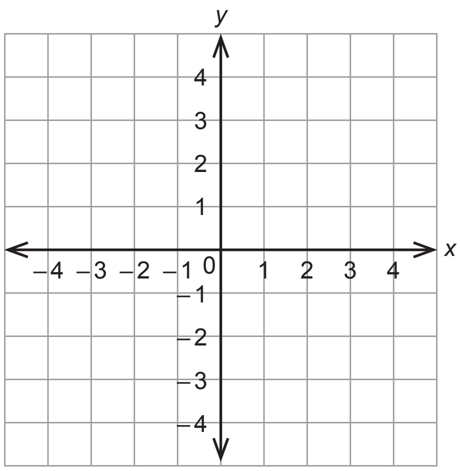
c) Encuentra el valor absoluto del desplazamiento horizontal, el desplazamiento vertical y la pendiente de cada segmento de *a*).

i) |desplaz. *x OP*| = *3*	ii) |desplaz. *x OP*| =	iii) |desplaz. *x OP*| =	iv) |desplaz. *x OP*| =
|desplaz. *y OP*| = *2*	|desplaz. *y OP*| =	|desplaz. *y OP*| =	|desplaz. *y OP*| =
|pendiente *OP*| = $\frac{2}{3}$	|pendiente *OP*| =	|pendiente *OP*| =	|pendiente *OP*| =
|desplaz. *x OP′*| =	|desplaz. *x OP′*| =	|desplaz. *x OP′*| =	|desplaz. *x OP′*| =
|desplaz. *y OP′*| =	|desplaz. *y OP′*| =	|desplaz. *y OP′*| =	|desplaz. *y OP′*| =
|pendiente *OP′*| =	|pendiente *OP′*| =	|pendiente *OP′*| =	|pendiente *OP′*| =

d) Compara los valores absolutos de las pendientes de *OP* y *OP′*. ¿Qué observas?

____

4. Representa el punto *Q* (– 4, – 2) en el sistema de coordenadas cartesianas.



a) Aplica al punto *Q* una rotación de 90° en sentido horario alrededor del origen *O*. Designa al homólogo *Q*.

i) *Q* está en el cuadrante ____. *Q′* está en el cuadrante ____.

ii) *OQ* tiene un |desplaz. *x*| = ____ y un |desplaz. *y*| = ____.

OQ′ tiene un |desplaz. *x*| = ____ y un |desplaz. *y*| = ____.

iii) Las coordenadas del punto Q′ son (,   ).

b) Aplica al punto *Q* (−4, −2) una rotación de 90° en sentido antihorario alrededor del origen. designa al homólogo *Q′′*.

i) *Q′′* se encuentra en el cuadrante ______.

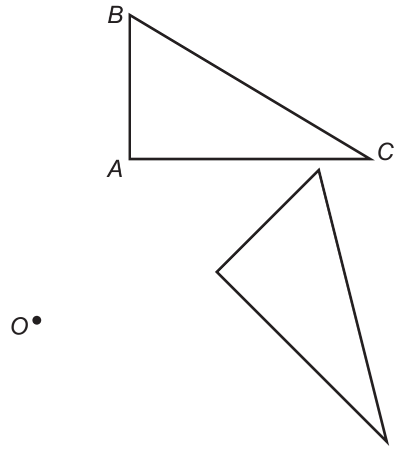
ii) *OQ′′* tiene un |desplaz. *x*| = ____ y un |desplaz. *y*| = ____.

iii) Las coordenadas del punto *Q′′* son (,   ).

c) Compara el |desplazamiento vertical| y el |desplazamiento horizontal| de *OQ′* y *OQ′′*. ¿Cambian en función del sentido de la rotación? ¿Cómo afecta el sentido de la rotación a las coordenadas de *Q′* y *Q′′*?

G8-29 Identificar rotaciones

1. El triángulo *ABC* rota alrededor del punto *O*.



a) Señala los vértices del homólogo. Usa A', B', C'.

b) Traza los segmentos OA y OA'.

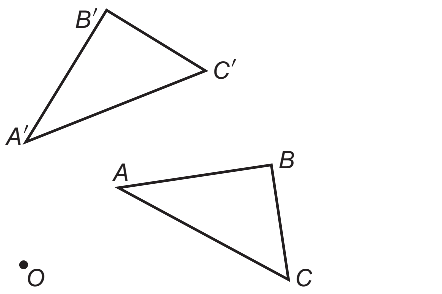
c) Mide el ángulo AOA'. $\angle AOA' =$ ______

d) Deduce la amplitud de $\angle BOB'$. ______
Dibuja el ángulo y mídelo para comprobar tu deducción.

e) El triángulo *ABC* gira alrededor del punto *O* ______° en sentido horario o ______° en sentido antihorario para obtener $\Delta A'B'C'$.

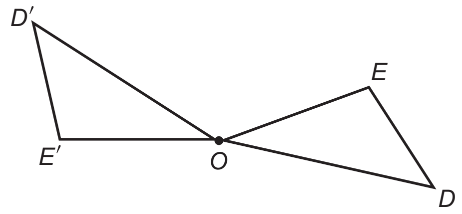
2. Une un vértice y su homólogo al punto *O*. Identifica el ángulo de rotación alrededor del punto *O.*

a)



______° en sentido horario
o ______° en sentido antihorario

b)



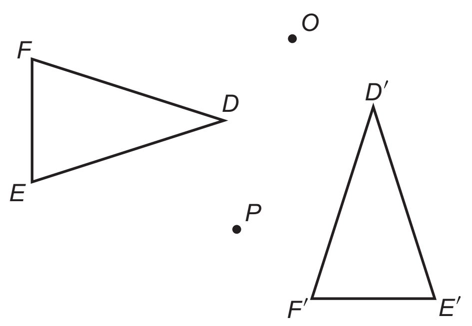
______° en sentido horario
o ______° en sentido antihorario

RECUERDA: Cuando una figura rota o gira alrededor de un punto *O*, todos los puntos de la figura se desplazan en el mismo sentido. Para cualquier punto *A* de la figura y su homóloga A', $\angle AOA'$ es igual al ángulo de rotación y $OA = OA'$.

3. El triángulo *DEF* rota alrededor del punto *O* o del punto *P*.

a) Traza segmentos y mide los ángulos que se forman con los puntos *O* y *P* para compararlos.

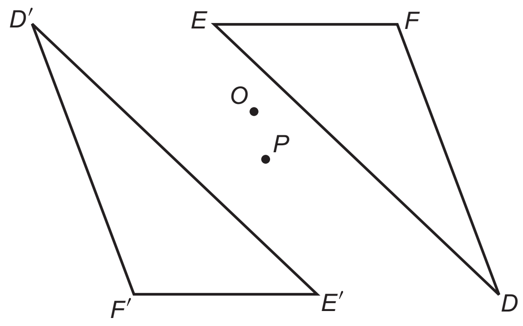
i)



¿Es $\angle DOD' = \angle EOE'$? ______

¿Es $\angle DPD' = \angle EPE'$? ______

ii)



¿Es $\angle DOD' = \angle EOE'$? ______

¿Es $\angle DPD' = \angle EPE'$? ______

b) ¿Qué punto es el centro de rotación, *O* o *P*?

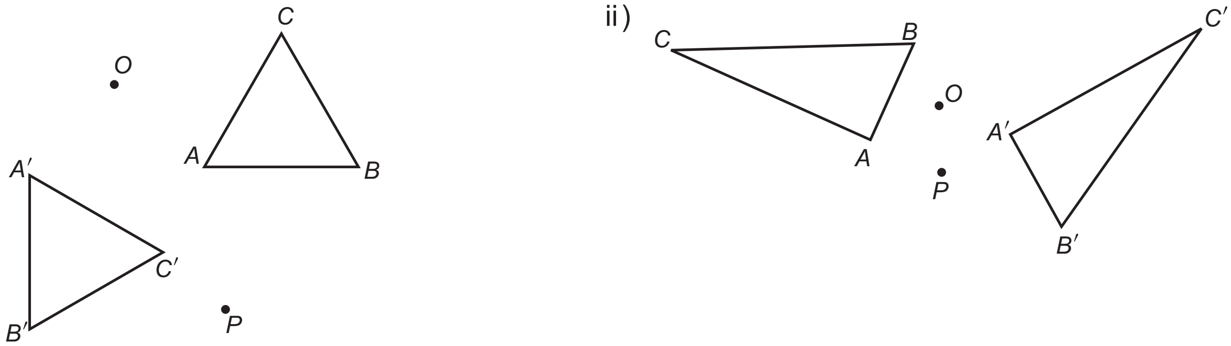
i) ______

ii) ______

4. El triángulo *ABC* rota alrededor del punto *O* o del punto *P*.

a) Traza y mide los segmentos *OA*, *OA′*, *OB* y *OB′*.

i) ii)



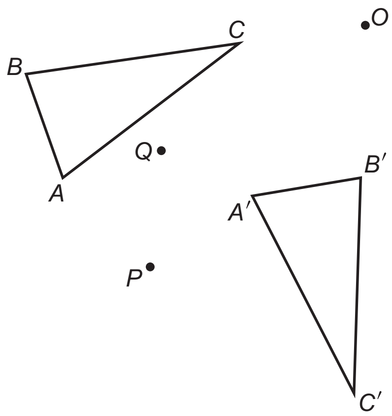
¿Es $OA = OA'$? ______ ¿Es $OB = OB'$? ______ ¿Es $OA = OA'$? ______ ¿Es $OB = OB'$? _____

b) Traza y mide los segmentos *PA*, *PA′*, *PB* y *PB′*.

i) ¿Es $PA = PA'$? ______ ¿Es $PB = PB'$? ____ ii) ¿Es $PA = PA'$? ______ ¿Es $PB = PB'$? ____

c) ¿Qué punto es el centro de rotación, *O* o *P*? i) ______ ii) ______

5. En la rotación de la derecha, ¿qué punto es el centro de rotación, *O*, *P* o *Q*? ¿Cuál es el ángulo de rotación? Justifica tu respuesta.

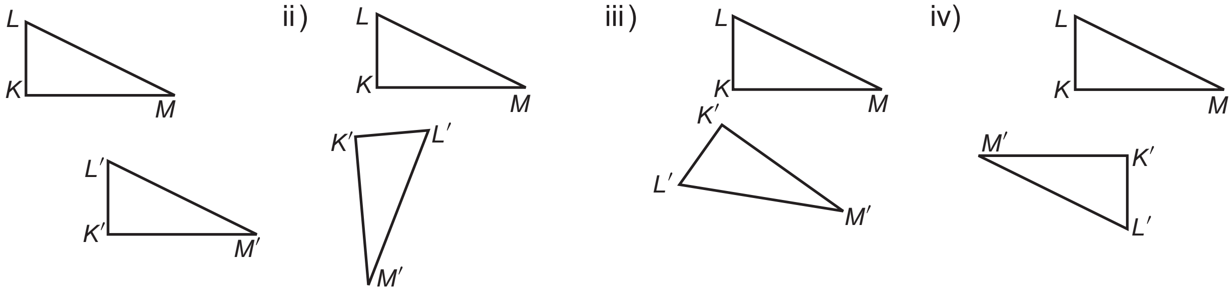


6. Completa la tabla para resumir. ¿Qué le sucede a una figura reflejada? ¿Y a una figura desplazada? ¿Y a una figura rotada?

Transformación	**Tamaño de los lados**	**Amplitud de los ángulos**	**Orientación**
Reflexión			
Traslación			
Rotación			

7. a) Deduce qué clase de transformación (traslación, reflexión o rotación) convierte *KLM* en *K′L′M′*.

i) ii) iii) iv)



b) Une cada vértice con su homólogo. ¿Son paralelos los segmentos que has trazado?

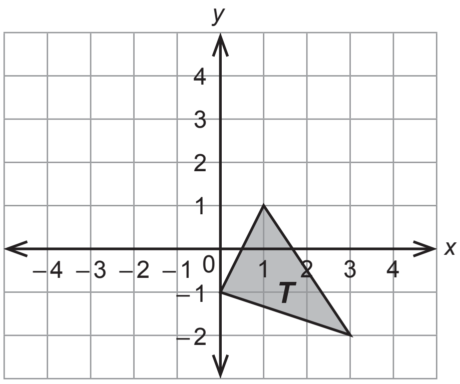
c) ¿Son iguales los segmentos que has trazado en el ejercicio anterior?

d) ¿Cómo pueden ayudarte a confirmar tus deducciones las respuestas de los ejercicios *b*) y *c*)?

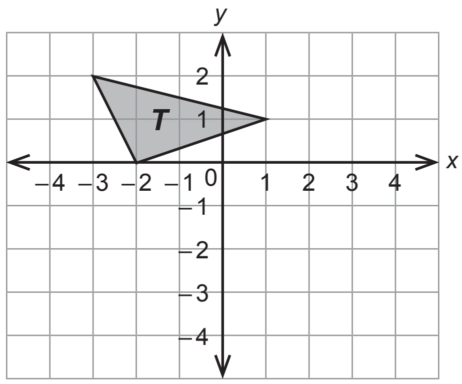
G8-30 Composición de transformaciones

1. a) Aplica una traslación al triángulo *T* según las indicaciones. Designa al homólogo como *T′*. A continuación, traslada *T′* a *T**.

i) 2 unidades hacia arriba y 3 unidades hacia la izquierda. A continuación, 1 unidad hacia arriba y 4 unidades hacia la derecha.



ii) 4 unidades hacia abajo y 3 unidades hacia la derecha. A continuación, 3 unidades hacia arriba y 4 unidades hacia la izquierda.



b) Escribe las coordenadas de los vértices de la figura original y de sus homólogos.

i)

T	(,)	(,)	(,)
T′	(,)	(,)	(,)
*T**	(,)	(,)	(,)

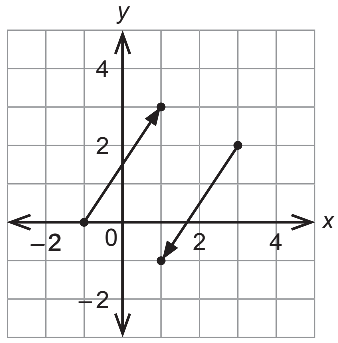
ii)

T	(,)	(,)	(,)
T′	(,)	(,)	(,)
*T**	(,)	(,)	(,)

c) ¿Cuál es la única transformación (traslación, reflexión o rotación) que convierte el triángulo *T* en el triángulo *T**? ________________

RECUERDA: Podemos usar la expresión que describe la traslación para encontrar las coordenadas del homólogo.

Ejemplos: Las coordenadas de un punto trasladado 2 unidades hacia la derecha y 3 unidades hacia arriba son $(x, y) \rightarrow (x + 2, y + 3)$
Las coordenadas de un punto trasladado 2 unidades hacia la izquierda y 3 unidades hacia abajo son $(x, y) \rightarrow (x + (-2), y + (-3))$



d) Escribe las expresiones de las coordenadas de las transformaciones del ejercicio *a*).

i) $T \rightarrow T'$: $(x, y) \rightarrow (x +$ ______, $y +$ ______$)$

$T' \rightarrow T^*$: $(x, y) \rightarrow (x +$ ______, $y +$ ______$)$

$T \rightarrow T^*$: $(x, y) \rightarrow (x +$ ______, $y +$ ______$)$

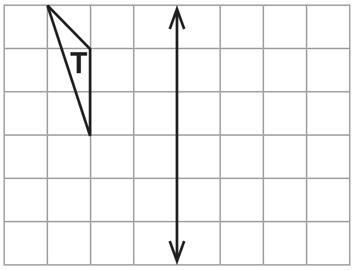
ii) $T \rightarrow T'$: $(x, y) \rightarrow (x +$ ______, $y +$ ______$)$

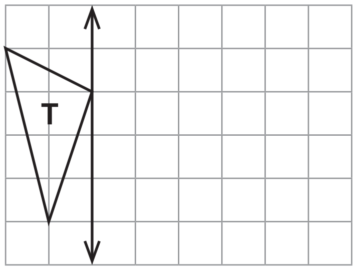
$T' \rightarrow T^*$: $(x, y) \rightarrow (x +$ ______, $y +$ ______$)$

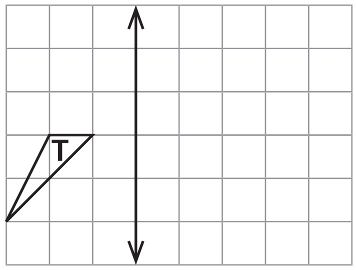
$T \rightarrow T^*$: $(x, y) \rightarrow (x +$ ______, $y +$ ______$)$

e) Si un polígono *P* se transforma en el polígono P′ mediante una composición de traslaciones, ¿son congruentes los polígonos *P′* y *P*? Justifica tu respuesta.

2. a) Aplica al triángulo *T* una reflexión respecto al eje de simetría. Designa al homólogo *T′*.

i) 

ii) 

iii) 

b) Aplica una traslación a *T′* según las indicaciones. Designa al homólogo *T**.

i) 3 unidades hacia abajo

ii) 4 unidades hacia la derecha

iii) 3 unidades hacia arriba y 2 unidades hacia la derecha

c) Traza los segmentos que unen cada vértice de *T* con su homólogo en *T**. ¿Son paralelos los segmentos?

i) ________________ ii) ________________ iii) ________________

d) ¿Son iguales los segmentos que has trazado en el ejercicio anterior?

i) ________________ ii) ________________ iii) ________________

e) ¿Hay una única transformación que convierta *T* en *T**? Si es así, ¿de qué transformación se trata? Indica el vector de traslación, el eje de simetría o el centro de rotación.

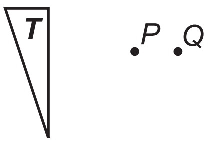
i) ________________ ii) ________________ iii) ________________

f) ¿Son congruentes los triángulos *T* y *T**? ¿Por qué?

3. a) Aplica las transformaciones y señala cada homólogo.

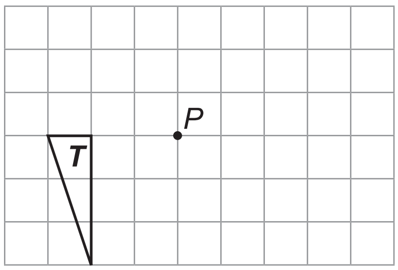
i) *T* → *T′*: Rotación de 45° en sentido horario alrededor de *P*

T′ → *T*: Rotación de 90° en sentido horario alrededor de Q



ii) *T* → *T′*: Rotación de 90 en sentido antihorario alrededor de *P*

T′ → *T**: Traslación de 2 unidades hacia la derecha y 3 unidades hacia arriba



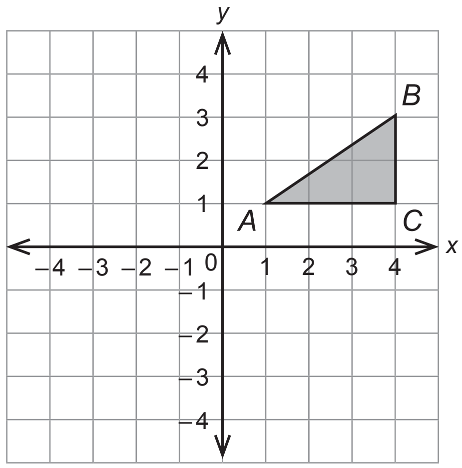
b) ¿Hay una única traslación o reflexión que transforme *T* en *T**? Si es así, dibuja el vector de traslación o el eje de simetría.

i) ________________ ii) ________________

c) ¿Son congruentes los triángulos *T* y *T**? ¿Por qué?

4. Carlos dibuja un polígono en un sistema de coordenadas cartesianas y le aplica 10 transformaciones distintas (traslaciones, reflexiones y rotaciones). ¿Son congruentes el polígono original y su homólogo tras las 10 transformaciones? Justifica tu respuesta.

G8-31 Polígonos congruentes y transformaciones



1. a) Aplica a ΔABC una reflexión respecto al eje *x*. Usa ′ para designar al homólogo. Escribe una expresión de congruencia para los triángulos.

$\Delta ABC \cong$ ___________

b) Aplica a ΔABC un giro de 180° alrededor del origen. Usa * para designar al homólogo. Escribe una expresión de congruencia para los triángulos.

$\Delta ABC \cong$ ___________

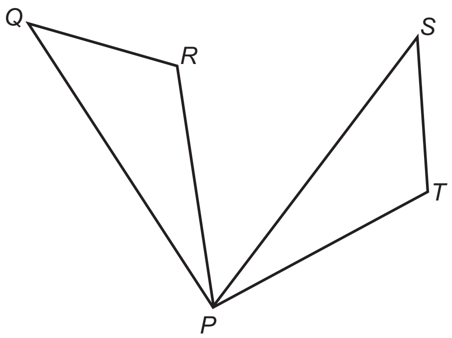
c) Dibuja una flecha curva en cada triángulo para indicar el sentido en el que se lee el triángulo. ¿La flecha apunta en sentido horario (SH) o en sentido antihorario (SAH)?

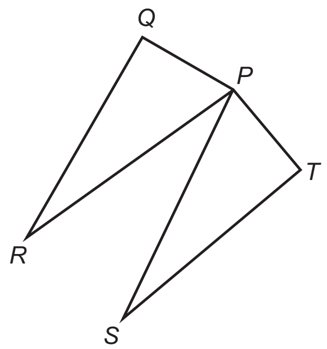
ΔABC ________ $\Delta A'B'C'$ ________ $\Delta A^*B^*C^*$ ________

d) ¿Qué transformación mantiene el sentido de la flecha? ______________________

¿Qué transformación cambia el sentido de la flecha? ______________________

2. a) ¿Son congruentes los triángulos? Si es así, escribe una expresión de congruencia.

i) 

ii) 

________________________ ________________________

b) Dibuja una flecha curva en cada triángulo para indicar el sentido en el que se lee el triángulo en la expresión de congruencia. ¿El sentido es el mismo u opuesto?

i) ____________________________ ii) ____________________________

c) ¿Qué clase de transformación (rotación o reflexión) convierte *PQR* en *PST*?

i) ____________________________ ii) ____________________________

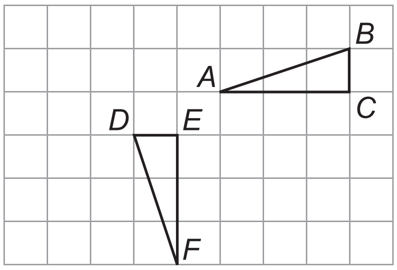
d) En la reflexión de *a*), traza los segmentos que unen los vértices correspondientes. Recuerda que el eje de simetría es perpendicular a estos segmentos y se interseca con ellos en los puntos medios respectivos. Traza el eje de simetría.

e) ¿Cuál es el centro de la rotación de *a*)? ___________

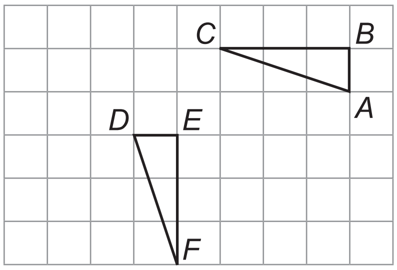
Mide el ángulo de rotación. Describe la rotación. ________________________

3. a) ¿Son congruentes los triángulos? Si es así, escribe una expresión de congruencia.

i)



ii)



______________________________ ______________________________

b) En la expresión de congruencia, ¿qué vértice corresponde al vértice *A*? Dibuja una flecha en la cuadrícula que una el vértice *A* con su transformado. Describe la traslación.

i) ______________________________ ii) ______________________________

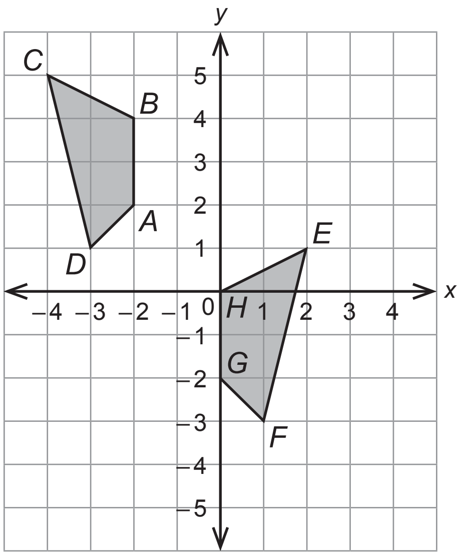
c) Aplica al triángulo *ABC* la misma traslación que en b). Usa ′ para designar los vértices homólogos.

d) ¿Qué transformación debes efectuar en $\Delta A'B'C'$ para obtener ΔDEF? Indica el eje de simetría o el ángulo y el sentido de la rotación. Pista: El centro de rotación es el vértice común de los triángulos.

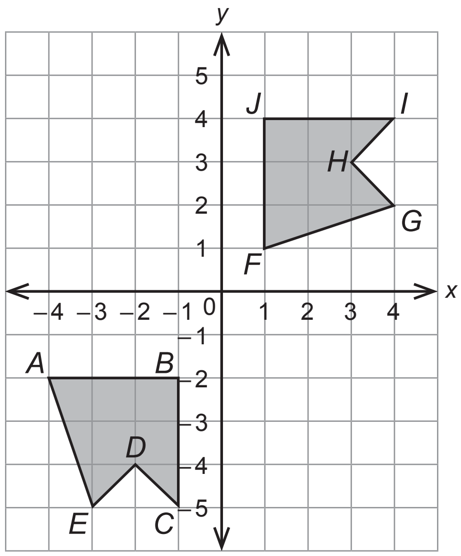
i) ______________________________ ii) ______________________________

4. a) Escribe una expresión de congruencia para los polígonos.

i)



ii)



______________________________ ______________________________

b) Describe la composición de transformaciones aplicadas para convertir una figura en otra. Recuerda describir detalladamente el sentido y las unidades de la traslación, el eje de simetría o el ángulo, el sentido y el centro de rotación.

Extra ▶ Describe otra composición de transformaciones que convierta *ABCD* en *GHEF* del ejercicio *4 a) i).*

G8-32 Semejanza

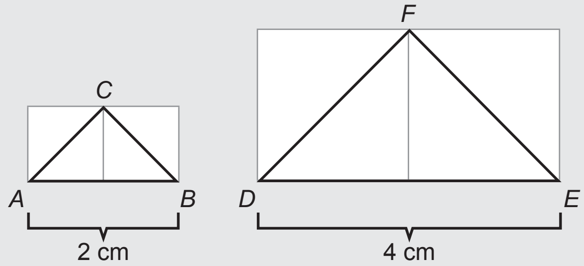
En matemáticas, se dice que dos figuras son **semejantes** si las longitudes de sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos correspondientes son iguales.

La longitud de los lados de ΔDEF es dos veces la longitud de los de ΔABC.

$AB : DE = BC : EF = AC : DF = 1 : 2$

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$

Para indicar la correspondencia, escribimos una **razón de semejanza**: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.



1. Cada rectángulo está formado por 2 cuadrados.

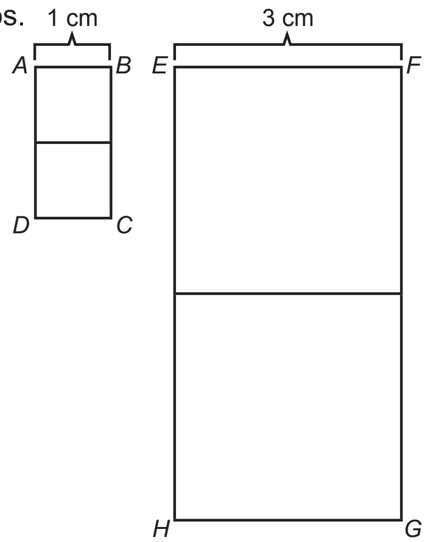
a) Encuentra la razón de los lados correspondientes de los rectángulos.

$AB : EF =$ ______ : ______

$BC : FG =$ ______ : ______

$CD :$ ______ $=$ ______ : ______

$AD :$ ______ $=$ ______ : ______



b) ¿Son semejantes estos rectángulos? ___________

c) ¿Por qué no es necesario comprobar que los ángulos son iguales para identificar si los rectángulos son semejantes?

____

d) Escribe la razón de semejanza. $ABCD \sim$ ___________

2. Los rectángulos *ABCD* y *EFGH* son semejantes.

a) Encuentra *AB : EF*.

i) $AB = 1$ cm, $BC = 2$ cm, $EF = 3$ cm

$AB : EF =$ __1__ : __3__

ii) $AB = 2$ cm, $BC = 6$ cm, $EF = 4$ cm

$AB : EF =$ ______ : ______

iii) $AB = 1$ cm, $BC = 3$ cm, $EF = 5$ cm

$AB : EF =$ ______ : ______

iv) $AB = 3$ cm, $BC = 2$ cm, $EF = 4$ cm

$AB : EF =$ ______ : ______

b) Para los mismos rectángulos, *AB : EF = BC : FG.* Encuentra la longitud de *FG.*

i) $\overset{\times 3}{1 : 3} = \overset{\times 3}{2 : FG}$

$FG = 6$ *cm*

ii)

iii)

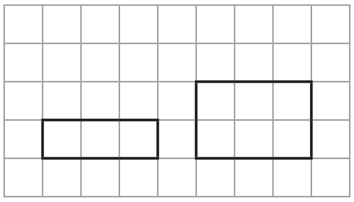
iv)

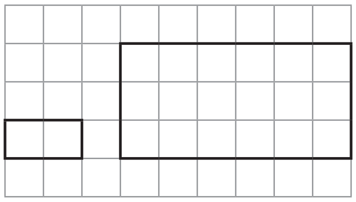
c) Dibuja los rectángulos *ABCD* y *EFGH*.

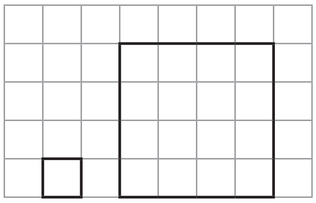
3. a) Un cuadrado y un rectángulo tienen los mismos ángulos. ¿Son semejantes? Justifica tu respuesta.

b) ¿Pueden ser semejantes un trapecio y un cuadrado? Justifica tu respuesta.

4. ¿Son semejantes los rectángulos de cada par? Justifica tu respuesta.

a) 

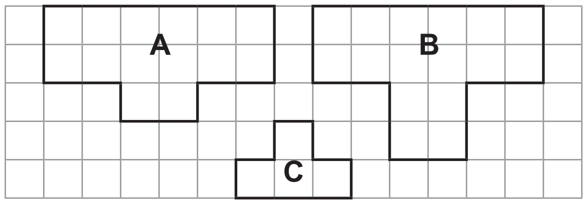
b) 

c) 

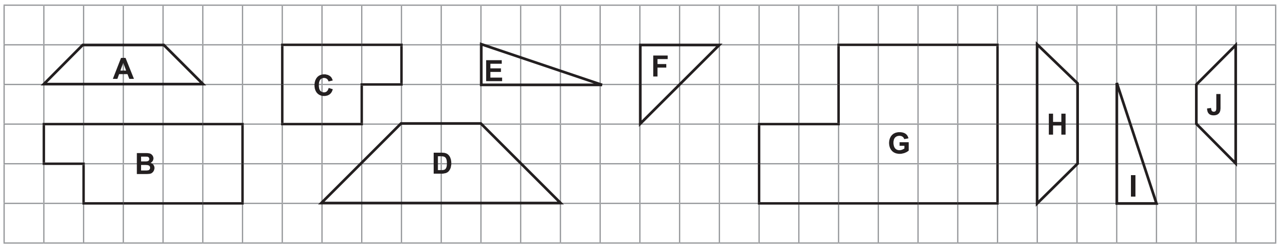
d) 2 cm × 4 cm y 3 cm × 6 cm   e) 1 m × 2 m y 2,5 m × 5,5 m   f) 5 mm × 4 mm y 4 mm × 3,2 mm

5. a) ¿Cuáles de estas figuras son semejantes? ________

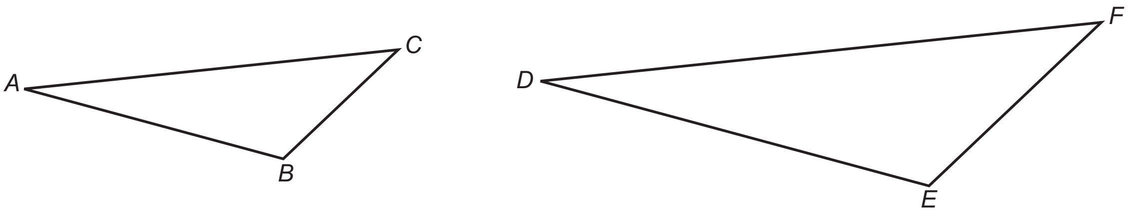
b) En la figura que no es semejante a las otras dos, marca un lado que no sea proporcional al lado correspondiente de las otras dos figuras.



6. ¿Qué pares de figuras son congruentes? ¿Cuáles son semejantes? ¿Por qué?

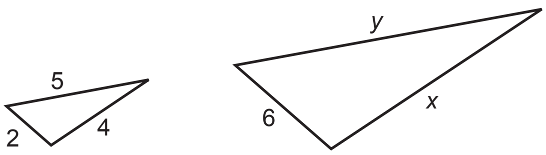


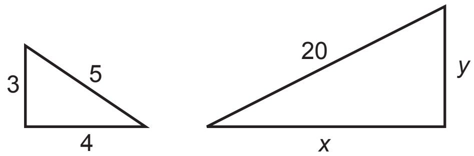
7. a) Mide todos los ángulos y todos los lados de los triángulos.



b) ¿Son semejantes ΔABC y ΔDEF? Explícalo usando las medidas de los ángulos y las razones de los lados.

8. Los triángulos de cada par son semejantes. Las medidas están en centímetros. Encuentra *x* e *y*.

a) 

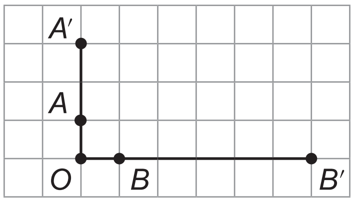
b) 

9. a) Los ángulos de ΔKLM miden 30°, 60° y 90°. Los ángulos de ΔPOR miden 35°, 55° y 90°. ¿Son semejantes los triángulos? Justifica tu respuesta.

b) Los lados de ΔGHI miden 2 cm, 4 cm y 5 cm. Los lados de ΔUVW miden 3 cm, 8 cm y 10 cm. ¿Son semejantes los triángulos? Justifica tu respuesta.

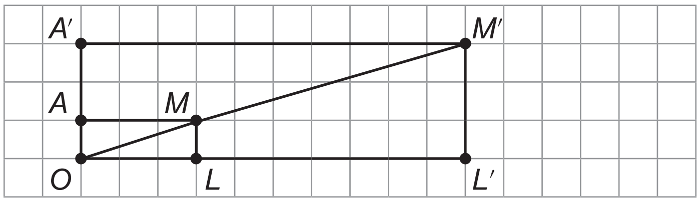
G8-33 Homotecias

1. Encuentra la razón entre las longitudes de los segmentos.

a) 

$OA' : OA =$ 3 : 1

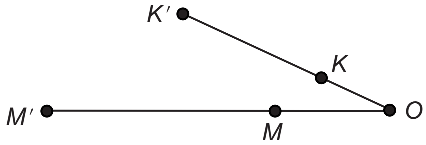
$OB' : OB =$ ______ : ______

b) 

$OA' : OA =$ ______ : ______ $A'M' : AM =$ ______ : ______

$OL' : OL =$ ______ : ______ $L'M' : LM =$ ______ : ______

2. Mide los segmentos. Encuentra las razones entre sus longitudes. Simplifica tus respuestas.



$OK' : OK =$ ______ : ______ $=$ ______ : ______

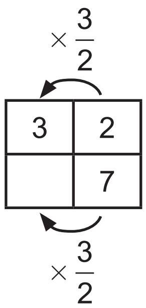
$OM' : OM =$ ______ : ______ $=$ ______ : ______

RECUERDA: Si en una proporción nos falta un término podemos usar una tabla de razones para encontrar el número que falta.

Ejemplo: $3 : 2 =$ ______ $: 7$

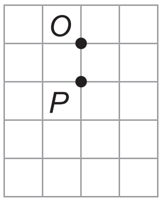
¿Por qué número debemos multiplicar el segundo término de la razón para obtener el primero? En una proporción este número siempre es el mismo.

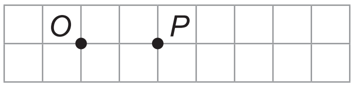
El número que falta es $7 \times \frac{3}{2} = \frac{21}{2}$.

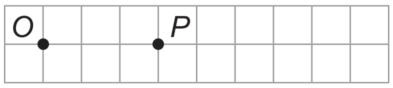


3. La razón $OP^* : OP = 3 : 1$.

a) Encuentra la longitud de OP. A continuación, encuentra la longitud de OP^*.

i) 

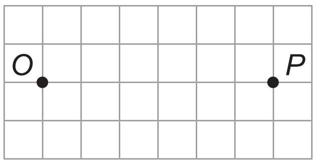
ii) 

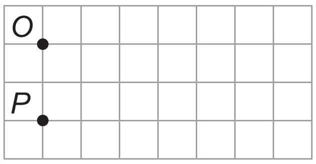
iii) 

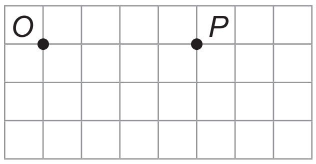
$OP =$ ______, $OP^* =$ ______ $OP =$ ______, $OP^* =$ ______ $OP =$ ______, $OP^* =$ ______

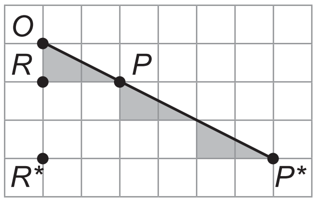
b) Traza el segmento OP. Encuentra el punto P^* en OP de modo que $OP^* : OP = 3 : 1$.

4. Traza el segmento OP. Encuentra el punto P^* en OP de modo que $OP^* : OP = 1 : 2$.

a) 

b) 

c) 



5. Sara cree que $OP^* : OP = 3 : 1$.

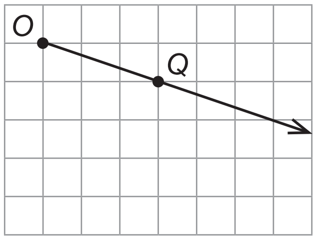
a) Mide los segmentos. $OP =$ ______ $OP^* =$ ______

¿Tiene razón Sara? ___________

b) ¿Son congruentes los triángulos grises del dibujo? ______

c) Dibuja el triángulo OP^*R^*. Cuenta los cuadrados para encontrar las razones.

$OR^* : OR =$ ______ : ______ $P^*R^* : PR =$ ______ : ______



d) Sara quiere dibujar un punto Q^* en el segmento OQ de modo que $OQ^* : OQ = 2 : 1$. ¿Cuántos triángulos necesita sombrear para encontrar el punto Q^*? ______

e) Sombrea los triángulos como en el ejercicio *c*) y dibuja el punto Q^*.

f) Un tercer punto (S) ayuda a formar el triángulo rectángulo OQS. Dibuja el punto S^* para formar OQ^*S^*. Cuenta los cuadrados para encontrar las razones.

$OS^* : OS =$ ______ : ______ $Q^*S^* : QS =$ ______ : ______

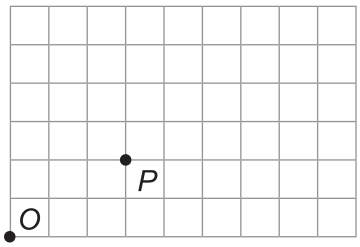
g) ¿Cómo puedes encontrar el punto Q^* contando cuadrados?

____

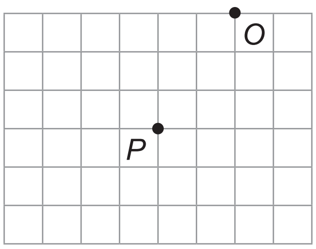
____

6. Traza el segmento OP. Marca el punto P^* en el segmento de modo que la razón entre las longitudes de OP y OP^* sea la indicada.

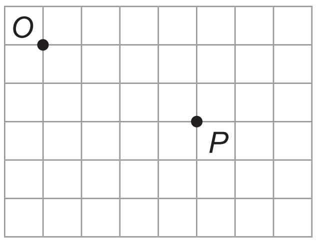
a) $OP^* : OP = 3 : 1$



b) $OP^* : OP = 2 : 1$

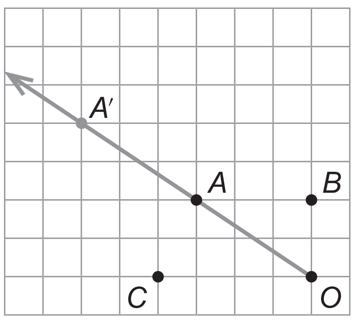


Extra ▶ $OP^* : OP = 3 : 2$

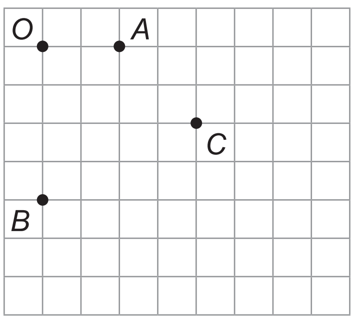


7. Encuentra el punto A' en OA, el punto B' en OB y el punto C' en OC, de modo que $OA' : OA = OB' : OB = OC' : OC$ sean todas iguales a la razón indicada.

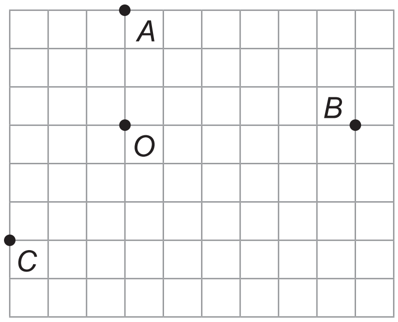
a) 2 : 1



b) 3 : 2

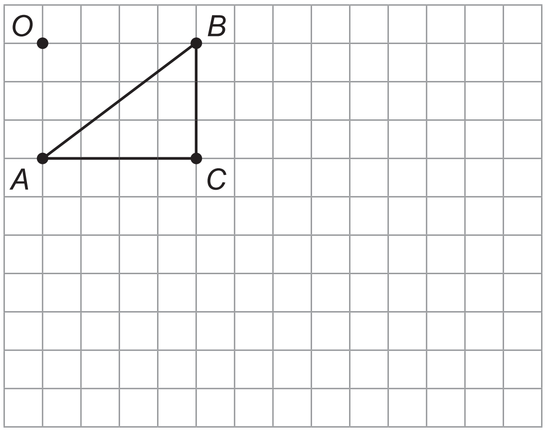


c) 1 : 3

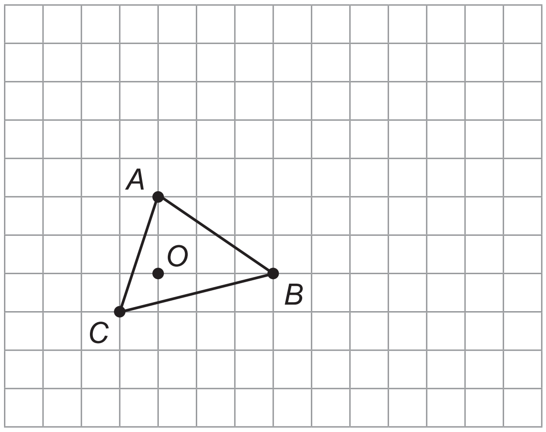


8. a) Traza semirrectas desde O a vértices de ΔABC. Alarga las semirrectas a lo largo de la cuadrícula.

i)



ii)



b) Encuentra tres puntos (A' en OA, B' en OB y C' en OC) de modo que $OA' : OA = OB' : OB = OC' : OC$ sean todas iguales a 3 : 1. Dibuja el triángulo A′B′C′.

c) Mide los ángulos de ambos triángulos de cada par.

i) $\angle A =$ ________ $\angle A' =$ ________ ii) $\angle A =$ ________ $\angle A' =$ ________

$\angle B =$ ________ $\angle B' =$ ________ $\angle B =$ ________ $\angle B' =$ ________

$\angle C =$ ________ $\angle C' =$ ________ $\angle C =$ ________ $\angle C' =$ ________

¿Qué observas? ____

d) Mide los lados de ambos triángulos de cada par.

i) $AB =$ ________ $A'B' =$ ________ ii) $AB =$ ________ $A'B' =$ ________

$BC =$ ________ $B'C' =$ ________ $BC =$ ________ $B'C' =$ ________

$AC =$ ________ $A'C' =$ ________ $AC =$ ________ $A'C' =$ ________

e) Encuentra la razón entre las longitudes de los lados correspondientes de ΔABC y $\Delta A'B'C'$.

i) $A'B' : AB =$ ___________ ii) $A'B' : AB =$ ___________

$B'C' : BC =$ ___________ $B'C' : BC =$ ___________

$A'C' : AC =$ ___________ $A'C' : AC =$ ___________

f) ¿La razón del ejercicio *e*) es la misma que la razón $OA' : OA = OB' : OB = OC' : OC$? __________

g) ¿Qué puedes afirmar acerca de ΔABC y $\Delta A'B'C'$? ______________________

La transformación aplicada sobre ΔABC se llama **homotecia**. El punto O es el **centro de homotecia**.

9. En el caso de las homotecias del ejercicio 8, ¿las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas?

a) Las homotecias conservan los ángulos de las figuras.

b) Las homotecias conservan la longitud de los lados de las figuras.

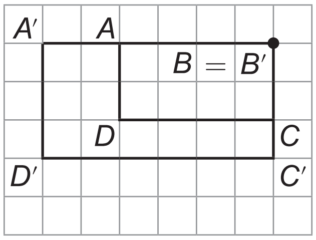
c) Las homotecias transforman figuras.

d) Las figuras homotéticas son semejantes.

G8-34 Propiedades de las homotecias

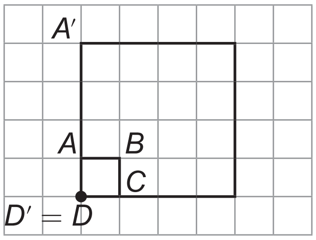
Si AB es el lado de la figura original y $A'B'$ es el lado de la homóloga después de una homotecia, la **razón de la homotecia** $A'B' : AB$. La razón suele expresarse como un número igual a $\frac{A'B'}{AB}$.

1. El punto negro señala el centro de homotecia. Señala con $'$ los vértices del homólogo tras la homotecia. A continuación, encuentra la razón.

a) 

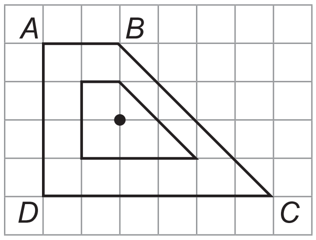
$\frac{A'B'}{AB} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

razón = 1,5

b) 

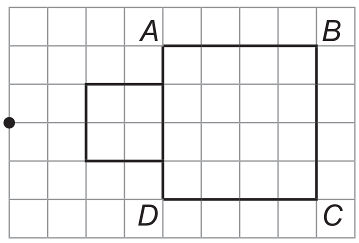
$\frac{A'B'}{AB} =$

razón = ______

c) 

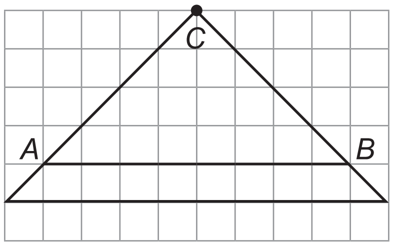
$\frac{A'B'}{AB} =$

razón = ______

d) 

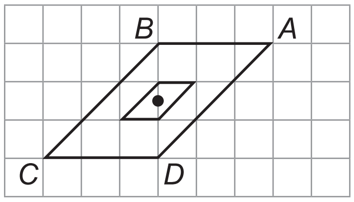
$\frac{A'B'}{AB} =$

razón = ______

e) 

$\frac{A'B'}{AB} =$

razón = ______

f) 

$\frac{A'B'}{AB} =$

razón = ______

Una homotecia es una **ampliación** si la figura homóloga es mayor que la original.
Una homotecia es una **reducción** si la figura homóloga es menor que la original.

2. a) Indica si las homotecias del ejercicio 1 son una ampliación (A) o una reducción (R).

b) Observa las razones del ejercicio 1. A partir de la razón, ¿cómo puedes saber si se trata de una ampliación o de una reducción?

____

c) En los ejercicios *1 c)* y *f)*, designa al centro de la homotecia O. Traza segmentos O′B′ y OB hasta los vértices de la figura original y de la homóloga.

d) Para los ejercicios *1 c)* y *f)*, encuentra la razón $\frac{O'B'}{OB}$. ¿Qué observas acerca de esta razón y de la razón de la homotecia? ______________________

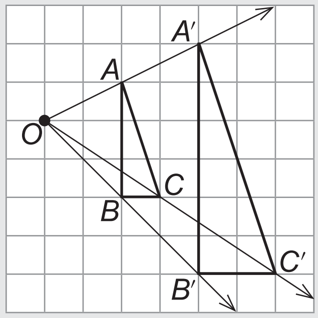
e) ¿Cómo puedes encontrar la longitud de $O'B'$ a partir de la longitud de OB y la razón?

Para aplicar una homotecia de razón 2 y centro O:

Paso 1: Trazamos semirrectas desde O hasta los vértices del polígono ABC. Encontramos la distancia de O a cada vértice.

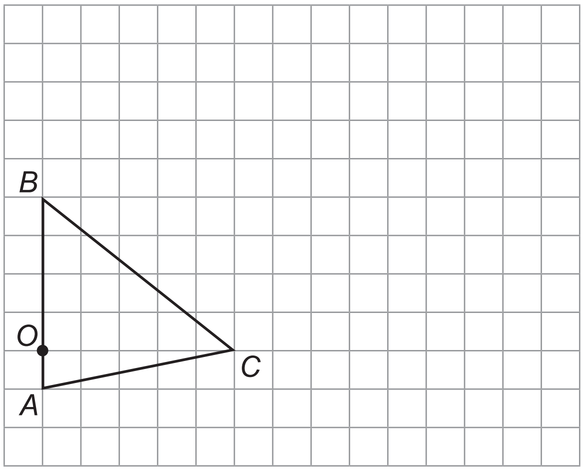
Paso 2: Usamos la razón para encontrar las distancias de O a cada vértice del homólogo. Por ejemplo, como la razón es 2, $OA' = 2OA$.

Paso 3: Dibujamos los vértices del homólogo sobre las semirrectas trazadas en el paso 1. Unimos los vértices para formar el polígono homólogo $A'B'C'$.



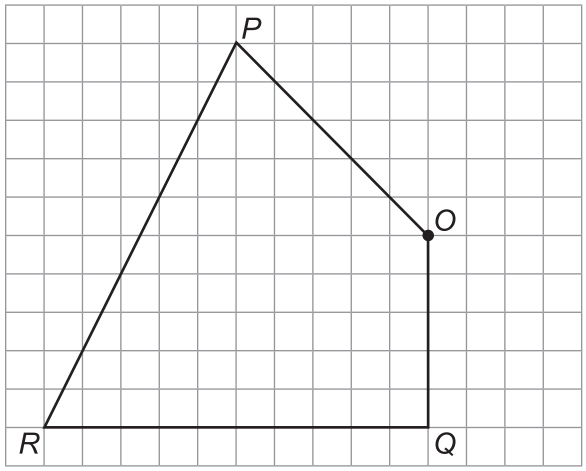
3. Aplica una homotecia con la razón indicada y centro en O. Identifica la homotecia como una ampliación o una reducción.

a) razón $= 2$



Es una ________________.

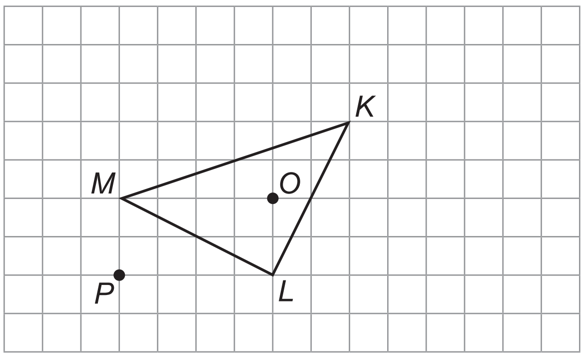
b) razón $= 0{,}6$



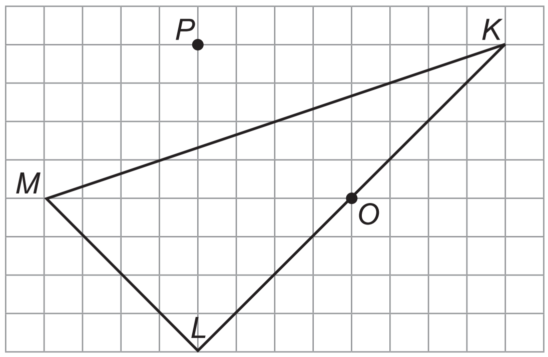
Es una ________________.

4. a) Aplica una homotecia sobre ΔKLM con la razón dada y centro en O. Designa al homólogo $\Delta K'L'M'$.

i) razón $= \dfrac{3}{2}$



ii) razón $= 0{,}25$



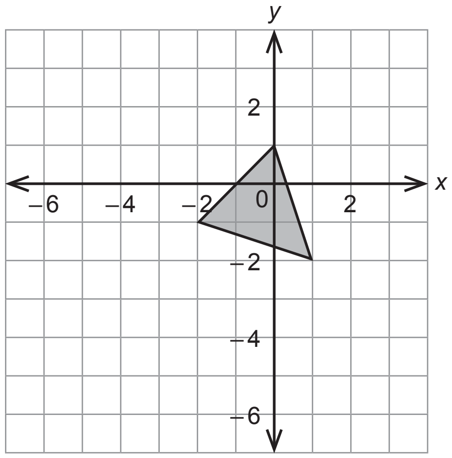
b) En las mismas cuadrículas, aplica una homotecia sobre ΔKLM usando las mismas razones que en *a*), pero con P como centro de homotecia. Designa al homólogo $\Delta K^*L^*M^*$.

c) ¿Qué puedes afirmar acerca de $\Delta K'L'M'$ y $\Delta K^*L^*M^*$? ________________

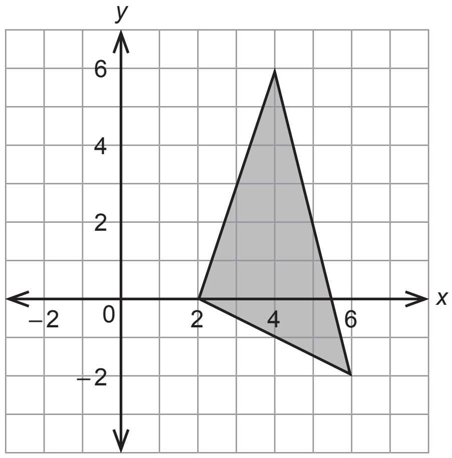
d) ¿Qué transformación convierte $\Delta K'L'M'$ en $\Delta K^*L^*M^*$? Descríbela detalladamente.

5. a) Aplica las homotecias con centro en el origen.

i) razón = 3



ii) razón = $\frac{1}{2}$



b) Escribe las coordenadas de cada vértice original y de cada homólogo.

i)

Original			
Homólogo			

ii)

Original			
Homólogo			

c) Escribe la expresión de las coordenadas de los puntos homotéticos de *a*).

i) $(x, y) \rightarrow ($, $)$

ii) $(x, y) \rightarrow ($, $)$

d) Escribe la expresión de las coordenadas de los puntos tras aplicar una homotecia con centro en el origen y la razón indicada.

i) razón = 1,5

$(x, y) \rightarrow ($, $)$

ii) razón = 0,25

$(x, y) \rightarrow ($, $)$

e) Deduce las coordenadas de los vértices de cada homólogo usando la fórmula de *d*).

i)

Original	(2, 0)	(0, −4)	(6, −6)
Homólogo			

ii)

Original	(0, 0)	(−4, 8)	(2, −2)
Homólogo			

f) Dibuja un sistema de coordenadas cartesianas y comprueba tus deducciones de *e*).

6. a) Representa en un sistema de coordenadas cartesianas un triángulo de vértices A (2, 2), B (−6, 0) y C (0, −4).

b) Aplica una homotecia sobre ΔABC de razón 2 y centro el origen. Designa al homólogo $\Delta A'B'C'$.

c) Aplica una homotecia sobre $\Delta A'B'C'$ de razón 0,5 y centro el origen. ¿Qué triángulo homólogo obtienes?

d) Repite los ejercicios *b*) y *c*) usando las razones $\frac{3}{2}$ y $\frac{2}{3}$. ¿Obtienes el mismo resultado?

G8-35 Homotecias y otras transformaciones

1. Completa la tabla para resumir lo que le ocurre a una figura tras una reflexión, una traslación, una rotación o una homotecia.

Transformación	Amplitud de los lados	Tamaño de los ángulos	Orientación
Reflexión			
Traslación			
Rotación			
Homotecia			

2. Completa las afirmaciones con *semejante* o *congruente*.

a) Las traslaciones, las reflexiones y las rotaciones transforman polígonos en polígonos ___________.

b) Las homotecias de razón distinta a 1 transforman polígonos en polígonos ______________.

c) Una homotecia de razón distinta a 1 más otra transformación convierten un polígono en un polígono ________________.

d) Una composición de reflexiones, rotaciones y traslaciones transforman cualquier polígono en un polígono ________________.

3. a) ¿Son congruentes los triángulos *ABC* y *DEF*? _________

b) ¿Cuál es la razón $\frac{DE}{AB}$? ___________

c) Aplica una homotecia sobre ΔABC con centro el origen y razón $\frac{DE}{AB}$. Usa $'$ para señalar el homólogo.

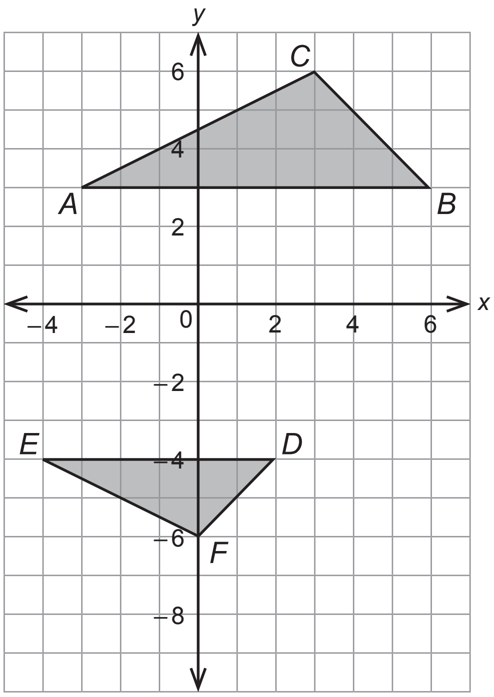
d) Aplica una reflexión a $\Delta A'B'C'$ con centro el origen y razón eje *x*. Usa * para señalar el homólogo.

e) ¿Qué puedes decir acerca de $\Delta A^*B^*C^*$ y ΔDEF?

____

f) ¿Qué transformación convierte $\Delta A^*B^*C^*$ en ΔDEF?

____

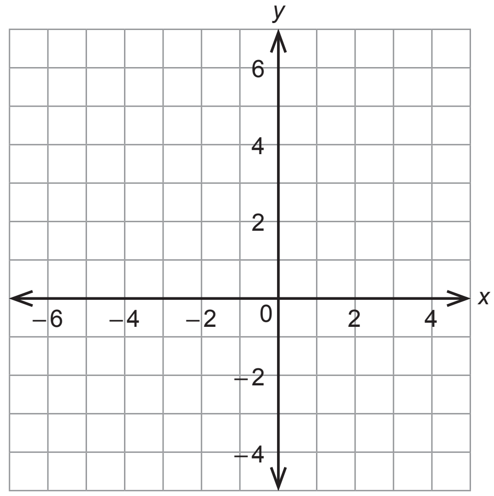


g) ¿Qué puedes afirmar acerca de los triángulos *ABC* y *DEF*? Justifica tu respuesta.

h) Rami dice que puede obtener ΔDEF a partir de $\Delta A'B'C'$ trasladando $\Delta A'B'C'$ 6 unidades hacia abajo y 2 unidades hacia la izquierda y a continuación, reflejando el homólogo respecto a la recta $y = -4$. ¿Tiene razón? Justifica tu respuesta.

Extra ▶ Escribe la expresión de cada transformación aplicada. Usa el vértice *A* para comprobar que las expresiones son correctas.

4. Represénta los puntos $A\ (-4, -2)$, $B\ (-4, 6)$, $C\ (-6, 0)$, $D\ (-2, -3)$, $E\ (2, -3)$ y $F\ (-1, -2)$.



a) ¿Son congruentes los triángulos ABC y DEF? _______

¿Son semejantes? _______

b) Aplica una homotecia sobre ΔABC de centro el origen y razón $\dfrac{DE}{AB}$. Usa $'$ para señalar el homólogo.

c) Aplica a $\Delta A'B'C'$ una rotación de 90° en sentido horario con centro en origen. Usa * para señalar el homólogo.

d) ¿Qué puedes afirmar acerca de $\Delta A^*B^*C^*$ y ΔDEF? ¿Qué transformación convierte $\Delta A^*B^*C^*$ en ΔDEF?

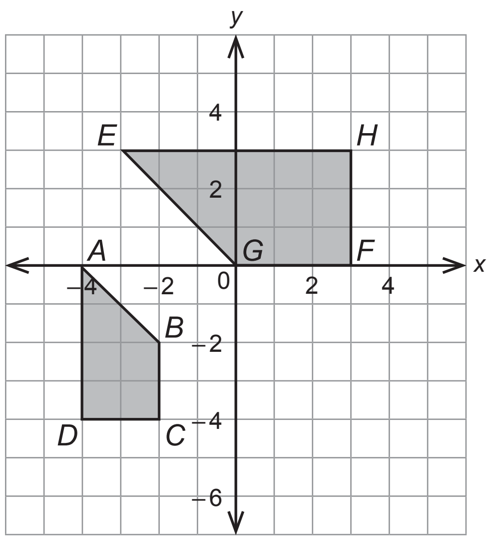
____

e) Describe otra composición de transformaciones que conviertan $\Delta A'B'C'$ en ΔDEF.

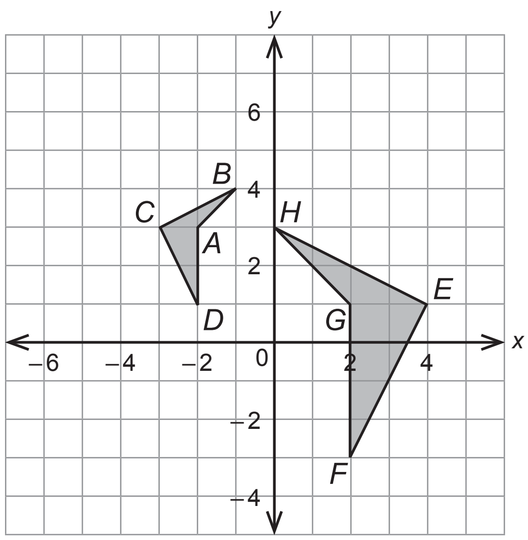
Extra ▶ Escribe la expresión de cada una de las transformaciones anteriores. Usa el vértice A para comprobar que las expresiones son correctas.

5. a) Determina la razón de semejanza de los pares de polígonos.

i)



ii)



_______________________ _______________________

b) Describe la composición de transformaciones aplicada. Sé tan preciso como puedas en tu descripción. Pista: Las figuras no son congruentes. ¿La composición incluye una homotecia?

Extra ▶ Describe otra composición de transformaciones para el mismo par de figuras.

6. Los lados del triángulo DEF son $DE = 3$ cm, $EF = 4$ cm y $FD = 5$ cm. Carmen aplica al triángulo una reflexión de eje una recta vertical, una rotación de 50° en sentido horario alrededor de E, y finalmente una homotecia de razón 3 y centro el punto D. ¿Cuánto miden los lados del triángulo resultante? Justifica tu respuesta.

G8-36 Criterios de semejanza

1. a) Dibuja un triángulo escaleno ABC en la cuadrícula pequeña.
Mide los lados AB y AC y también $\angle A$.

$AB =$ ______________ $AC =$ ______________

$\angle A =$ _________

b) Construye $\Delta A'B'C'$ con los lados dos veces más largos que los de ΔABC y con $\angle A = \angle A'$.
Usa la cuadrícula grande.

$A'B' = 2AB =$ ______________

$A'C' = 2AC =$ ______________

c) Mide el resto de lados y ángulos de ambos triángulos.

$BC =$ ______________ $B'C' =$ ______________

$\angle B =$ _________ $\angle B' =$ _________

$\angle C =$ _________ $\angle C' =$ _________

d) Encuentra las razones entre las longitudes de los lados.

$\dfrac{A'B'}{AB} =$ $\qquad$ $\dfrac{A'C'}{AC} =$ $\qquad$ $\dfrac{B'C'}{BC} =$

¿Son semejantes los triángulos? __________

e) *Conjetura*. LAL también es un criterio de semejanza:

Si $\angle A = \angle A'$ y $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC}$, entonces ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son semejantes. Repite los ejercicios del *a*) al *d*) con un triángulo agudo y razón 0,25 para comprobar la conjetura.

2. a) Dibuja un triángulo KLM. Haz que la longitud de KL sea un número entero de centímetros.

b) Mide los ángulos de ΔKLM.

c) Traza un segmento $K'L'$ de longitud un número entero de centímetros distinto de KL.
Usa $K'L'$ para construir un triángulo con $\angle K' = \angle K$ y $\angle L' = \angle L$.

d) ¿Qué sabes acerca de la amplitud del ángulo $\angle M'$? Justifica tu respuesta.

e) Mide los lados de ambos triángulos y encuentra las razones entre sus longitudes.

$\dfrac{K'L'}{KL} =$ $\qquad$ $\dfrac{L'M'}{LM} =$ $\qquad$ $\dfrac{K'M'}{KM} =$

¿Son semejantes los triángulos? __________

f) *Conjetura*. AA también es un criterio de semejanza:

Si $\angle K' = \angle K$ y $\angle L' = \angle L$, entonces ΔKLM y $\Delta K'L'M'$ son semejantes. Repite los ejercicios del *a*) al *d*) con otro triángulo y razón 3 para comprobar la conjetura.

3. Raúl dibuja dos triángulos, ABC y $A'B'C'$ con $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{A'C'}{AC} = 4$.

a) ¿Qué indica esta igualdad sobre la longitud de los lados?

$A'B' =$ ______ $\cdot$ AB, $B'C' =$ ___________, $A'C' =$ ___________

b) Raúl quiere demostrar que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes.
Aplica una homotecia sobre ΔABC de razón 4. Designa al nuevo triángulo $\Delta A^*B^*C^*$.
¿Qué sabes acerca de los lados de $\Delta A^*B^*C^*$?

$A^*B^* =$ ___________ $\cdot$ AB, $B^*C^* =$ ___________, $A^*C^* =$ ___________

c) Compara la longitud de los lados de $\Delta A'B'C'$ y $\Delta A^*B^*C^*$.

$A^*B^* =$ ___________, $B^*C^* =$ ___________, $A^*C^* =$ ___________

d) Escribe *semejantes*, *congruentes* o *ni semejantes ni congruentes*.

Las homotecias transforman polígonos en polígonos ________________;

por tanto, ΔABC y $\Delta A^*B^*C^*$ son / no son ________________.

$\Delta A'B'C'$ y $\Delta A^*B^*C^*$ son / no son ________________ según el criterio de

congruencia ________________.

Por tanto, $\Delta A'B'C'$ y ΔABC son / no son ________________.

e) *Conjetura*. LLL también es un criterio de semejanza:

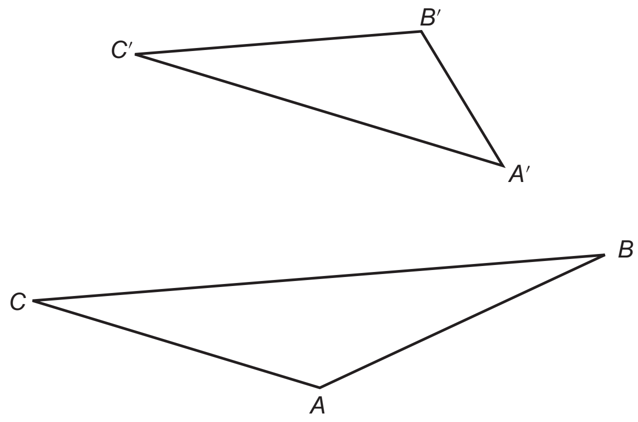
Si $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{A'C'}{AC}$, entonces ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son semejantes.

Repite los ejercicios del *a*) al *d*) con $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{2}{3}$ para comprobar la conjetura.

4. ¿LLA (lado-lado-ángulo) es un criterio de semejanza? Compruébalo en $\Delta A'B'C'$ y ΔABC.

a) Mide los lados y encuentra las razones:

$\dfrac{A'B'}{AB} =$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{B'C'}{BC} =$



b) Mide los ángulos: $\angle C =$ ______, $\angle C' =$ ______

c) ¿Parecen semejantes los triángulos
ΔABC y $\Delta A'B'C'$? ______

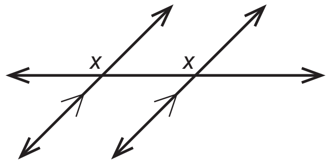
d) ¿LLA (lado-lado-ángulo) es un criterio
de semejanza? _________

5. a) ¿AL (ángulo-lado) es un criterio de semejanza? Justifica tu respuesta con el ejemplo del ejercicio 4.

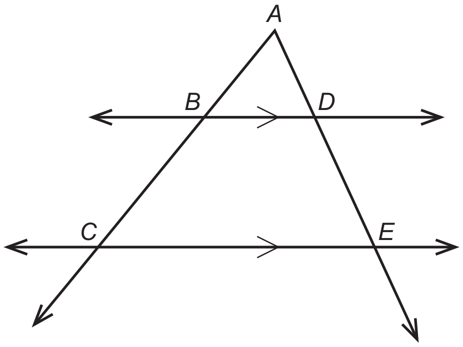
b) Dibuja dos triángulos con $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC}$ para demostrar que LL (lado-lado) no es un criterio de semejanza.

RECUERDA: Los ángulos correspondientes de rectas paralelas son iguales.

Si los ángulos correspondientes son iguales, las rectas son paralelas.



6. Las rectas *BD* y *CE* son paralelas.



a) Marca los ángulos que sabes que son iguales.

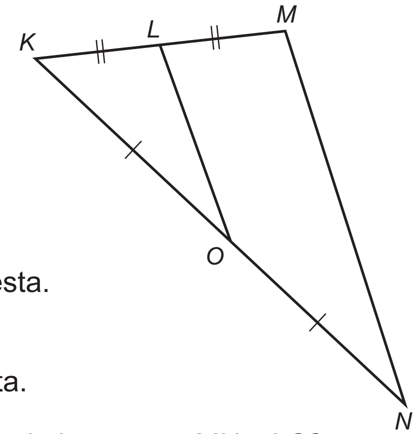
b) ¿Qué ángulos son iguales en ΔABD y ΔACE?

c) ¿Qué puedes afirmar acerca de ΔABD y ΔACE? Justifica tu respuesta.

d) $AB = 3$ cm, $AC = 9$ cm, $AD = 2{,}5$ cm y $BD = 3{,}2$ cm.
Encuentra las longitudes de *AE* y *CE*. Justifica cómo las sabes.

e) ¿Qué transformación convierte ΔABD en ΔACE?

7. a) ¿Qué ángulo tienen en común ΔKMN y ΔKLO? ______



b) *L* es el punto medio de *KM*; por tanto, $KM =$ ______ $\cdot$ KL.

O es el punto medio de *KN*; por tanto, $KN =$ ______ $\cdot$ KO.

c) $\dfrac{KM}{KL} =$ ______ y $\dfrac{KN}{KO} =$ ______

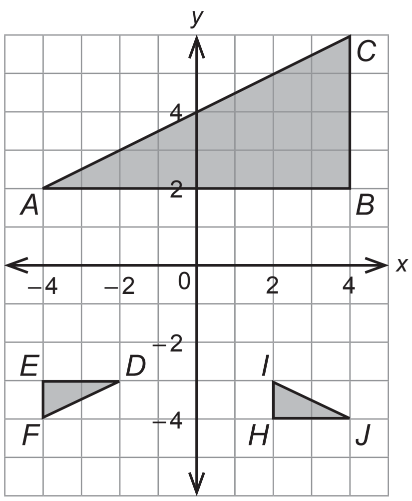
d) ¿Qué puedes afirmar acerca de ΔKMN y ΔKLO? Justifica tu respuesta.

e) Observa un par de ángulos correspondientes de las rectas *MN* y *LO*.
¿Qué puedes afirmar acerca de estos ángulos? Justifica tu respuesta.

f) ¿Qué te indica la relación entre los ángulos correspondientes acerca de las rectas *MN* y *LO*?

g) ¿Qué clase de cuadrilátero es *LMNO*?

8. a) ¿Qué triángulos del dibujo son congruentes? Justifica tu respuesta.



b) ¿Qué triángulos del dibujo son semejantes? Justifica tu respuesta.

c) ¿Qué composición de transformaciones convierte un triángulo en el otro? Recuerda indicar el eje de simetría; el centro, el sentido y el ángulo de rotación; el centro y la razón de homotecia, o la dirección y las unidades de traslación.

i) ΔABC en ΔEFD

ii) ΔEFD en ΔHIJ

iii) ΔHIJ en ΔABC

Extra ▶ Escribe la expresión de las coordenadas de los puntos de cada transformación de *c*).

G8-37 Triángulos semejantes y la pendiente de una recta

RECUERDA: Multiplicamos en cruz para convertir una igualdad de fracciones o de razones en una igualdad de multiplicaciones. Ejemplos:

$\frac{x}{5} = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\qquad$ $\frac{A'B'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$

$3x = 2 \times 5$ $\qquad$ $ad = bc$ $\qquad$ $A'B' \times BC = B'C' \times AC$

1. a) Multiplica en cruz para expresar las igualdades de razones en forma de igualdad de productos.

i) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ $\qquad$ ii) $\frac{6}{12} = \frac{7}{14}$ $\qquad$ iii) $\frac{6}{7} = \frac{12}{14}$

$3 \times 10 = 5 \times 6$ $\qquad$ ________________ $\qquad$ ________________

b) Rodea las dos expresiones anteriores que son iguales. Subraya los números intercambiados.

2. a) Multiplica en cruz para expresar las igualdades de razones en forma de igualdades de multiplicaciones.

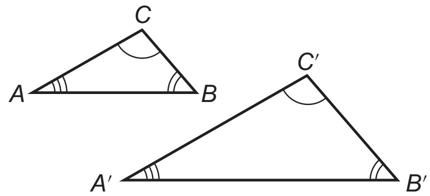
i) $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$ $\qquad$ ii) $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB}{BC}$ $\qquad$ iii) $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$

____________________ $\qquad$ ____________________ $\qquad$ ____________________

b) ¿Qué dos expresiones del ejercicio *a*) son iguales? ___________

c) En los triángulos ABC y $A'B'C'$, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$. Por tanto, $\frac{BC}{AB} = $ ______.

RECUERDA: ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son semejantes.
La razón de semejanza $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ indica que
$\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$
y $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$.



Criterios de semejanza:

Criterio ángulo-ángulo (AA):

Si $\angle A = \angle A'$ y $\angle B = \angle B'$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Criterio lado-ángulo-lado (LAL):

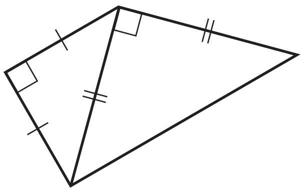
Si $\angle B = \angle B'$ y $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Criterio lado-lado-lado (LLL):

Si $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$, entonces $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

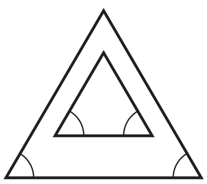
3. ¿Qué criterio usarías para demostrar que los triángulos son semejantes?

a)



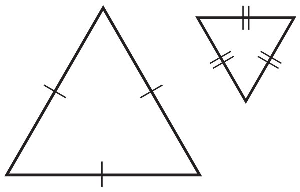
criterio de semejanza: ______

b)



criterio de semejanza: ______

c)



criterio de semejanza: ______

4. a) En el triángulo ABC, $\angle A = 60°$ y $AB = 2AC$. Encuentra la razón $\frac{AB}{AC}$. $\frac{AB}{AC} =$ ______

b) En el triángulo $\Delta A'B'C'$, $\angle A = 60°$, $A'B' = 6$ cm y $A'C' = 3$ cm.

Encuentra la razón $\frac{A'B'}{A'C'}$. $\frac{A'B'}{A'C'} =$ ______

c) ¿Qué observas acerca de las razones $\frac{AB}{AC}$ y $\frac{A'B'}{A'C'}$? ____________________________

d) Usa la multiplicación en cruz para demostrar que $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$.

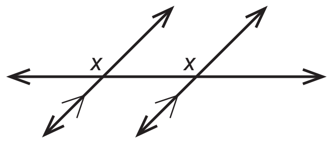
e) ¿Qué sabes acerca de ΔABC y $\Delta A'B'C'$? ____________________

¿Qué criterio de semejanza puedes usar? ____________

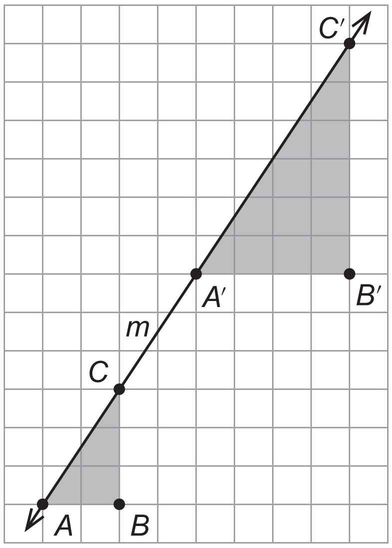
f) ¿Sabes cuánto miden los lados de ΔABC? ____________

RECUERDA: Los ángulos correspondientes de rectas paralelas son iguales.

Si los ángulos correspondientes son iguales, las rectas son paralelas.



5. Las rectas de una cuadrícula son paralelas y forman ángulos rectos.



a) ¿Qué puedes afirmar acerca de los lados AB y $A'B'$ de los triángulos ABC y $A'B'C'$? ________________________

b) Indica un par de ángulos correspondientes formados al intersecar la recta m con las rectas AB y $A'B'$.

$\angle$______ y $\angle$______

¿Qué sabes acerca de estos ángulos? ____________

c) Indica otro par de ángulos iguales en ΔABC y $\Delta A'B'C'$.

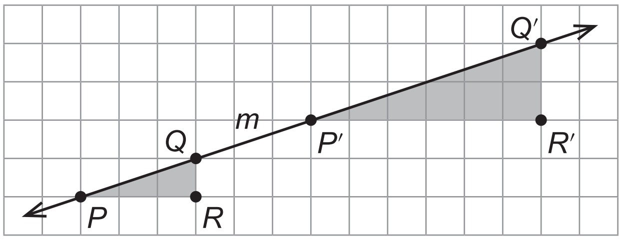
d) ¿Qué criterio de semejanza puedes usar para averiguar si ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son semejantes? ____________

e) ¿Qué sabes acerca de las razones $\frac{C'B'}{CB}$ y $\frac{A'B'}{AB}$?

____

f) ¿Qué sabes acerca de las razones $\frac{CB}{AB}$ y $\frac{C'B'}{A'B'}$? Justifica tu respuesta usando la multiplicación en cruz.

6. a) Repite el ejercicio 5 con ΔPQR y $\Delta P'Q'R'$.



b) ¿Has usado la longitud exacta de los lados de los triángulos en el ejercicio 5 y en el ejercicio 6 a)? ________

c) ¿Has usado la amplitud exacta de los ángulos de los triángulos en el ejercicio 5 y en el ejercicio 6 a)? ________

d) ¿El mismo método funcionaría para un par de triángulos con una razón distinta? _______________

e) Completa las afirmaciones con *el desplazamiento vertical*, *el desplazamiento horizontal* o *la pendiente*.

i) Dados los puntos P y Q, la longitud de QR es __________________________ de la recta m.

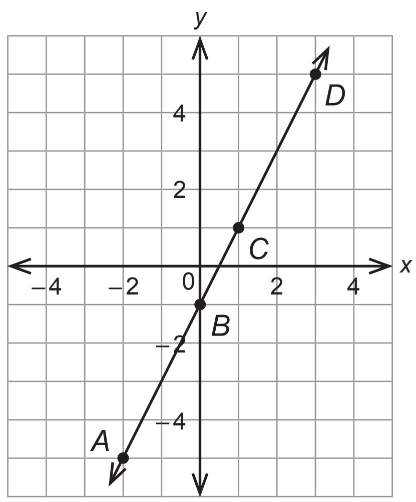
ii) Dados los puntos P y Q, la longitud de PR es __________________________ de la recta m.

iii) Dados los puntos P' y Q', la longitud de $Q'R'$ es __________________________ de la recta m.

iv) Dados los puntos P' y Q', la longitud de $P'R'$ es __________________________ de la recta m.

v) La razón $\dfrac{Q'R'}{P'R'} = \dfrac{QR}{PR}$ es ___________ de la recta m.

7. a) Encuentra el desplazamiento horizontal, el desplazamiento vertical y la pendiente a partir del par de puntos indicados en la gráfica. Asegúrate de que el desplazamiento horizontal sea positivo.



i) A y B

desplaz. $y =$ ______

desplaz. $x =$ ______

pendiente $=$

ii) A y C

desplaz. $y =$ ______

desplaz. $x =$ ______

pendiente $=$

iii) B y C

desplaz. $y =$ ______

desplaz. $x =$ ______

pendiente $=$

iv) A y D

desplaz. $y =$ ______

desplaz. $x =$ ______

pendiente $=$

b) ¿Qué observas acerca de las pendientes del ejercicio *a*)? ______________________

c) ¿La pendiente de la recta depende de los puntos que has usado para encontrarla? ________

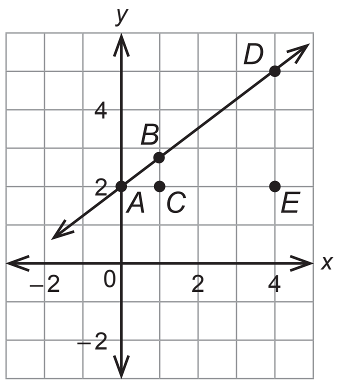
d) ¿Cuál es la intersección con el eje y de la recta AD? ______

e) Usa la pendiente y la intersección con el eje y para formular la ecuación de la recta. _____________

f) Usa tus respuestas del ejercicio 6 para justificar por qué la pendiente de la recta no depende de los puntos que escojas para encontrarla.

G8-38 Rectas y transformaciones

1. a) Encuentra la longitud de los segmentos.



$DE =$ ______ unidades

$AE =$ ______ unidades

$AC =$ ______ unidades

b) Usa las coordenadas de los puntos *A* y *D* para encontrar la pendiente de la recta *AD*.

pendiente de $AD =$

c) Completa con un signo la expresión: ΔABC ______ ΔADE.

d) ¿Qué sabes acerca de las razones $\dfrac{AE}{AC}$ y $\dfrac{DE}{BC}$? ___________

e) Usa tu respuesta del ejercicio *d*) para encontrar la longitud exacta de BC. _______ unidades

f) ¿Qué observas acerca de la pendiente de *AD* y la longitud de *BC*? ___________________________

Usa la longitud de *AC* para justificar por qué sucede esto. ___________________________________

____

____

g) ¿Cuál es la intersección con el eje *y* de la recta *AB*? ______

h) Formula la ecuación explícita de la recta *AB*. ________________

i) Traza una recta *r* paralela a *AD* que pase por el origen.

j) Para llegar de la recta *r* a la recta *AB*, puedes trasladar la recta *r* ______ unidades hacia arriba.

Escribe las coordenadas de los puntos trasladados. $(x, y) \rightarrow ($, $)$

k) Rodea la intersección con el eje *y* de *AB* en tus respuestas del ejercicio *j*).

l) ¿Cuál es la intersección con el eje *y* de la recta *r*? ______ ¿Cuál es su pendiente? ______

Escribe la ecuación explícita de la recta *r*. ________________

m) ¿El punto $\left(1, \dfrac{3}{4}\right)$ pertenece a la recta *r*? ______ Justifica tu respuesta.

____

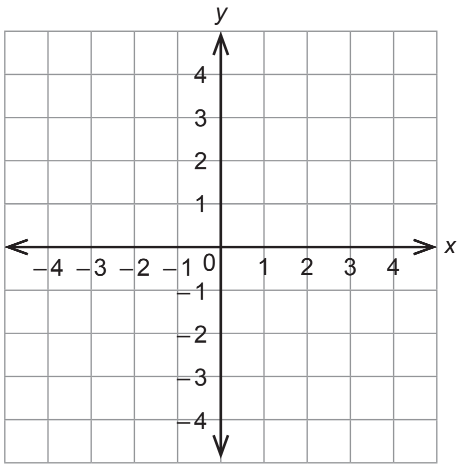
n) Dibuja un triángulo con los vértices *O* (0, 0), *P* (1, 0) y *Q* $\left(1, \dfrac{3}{4}\right)$. ¿Qué puedes afirmar acerca de ΔOQP y ΔADE? Justifica tu respuesta. ____

____

o) ¿Qué composición de transformaciones convierte ΔOQP en ΔADE?

____

2. a) Traza la recta $y = 3x + 1$ en un sistema de coordenadas cartesianas.



b) Escribe las coordenadas de dos puntos de la recta.

A (0,   ), B (1,   )

c) ¿Dónde se encuentra la intersección con el eje y en tu respuesta del ejercicio *b*)? ________________________

¿Cómo puedes obtener la pendiente de AB a partir de las coordenadas de B y la intersección con el eje y?

____

____

d) Aplica a la recta AB una reflexión respecto al eje y.

Escribe las coordenadas de los puntos simétricos. $(x, y) \rightarrow$ (,   )

e) ¿Cuáles son las coordenadas de los homólogos de A y B reflejados respecto al eje y?

A' (,   ), B' (,   )

f) ¿Cuál es la pendiente de la recta $A'B'$? ______ ¿Cuál es su intersección con el eje y? ______

¿Cuál es la ecuación explícita de la recta $A'B'$? ________________

g) Aplica a la recta AB una reflexión respecto al eje x. Escribe las coordenadas de los puntos simétricos.

$(x, y) \rightarrow$ (,   )

h) ¿Cuáles son las coordenadas de los homólogos de A y B reflejados respecto al eje x?

A^* (,   ), B^* (,   )

i) ¿Cuál es la pendiente de la recta A^*B^*? ______ ¿Cuál es su intersección con el eje y? ______

¿Cuál es la ecuación explícita de la recta A^*B^*? ________________

j) ¿Qué observas acerca de las rectas $A'B'$ y A^*B^*? ¿Las pendientes de las rectas coinciden con tu respuesta?

____

____

Extra ▶ En la ecuación $y = 3x + 1$, sustituye x e y por la expresión de las coordenadas de su homólogo. A continuación, reformula la ecuación explícita para la recta homóloga.

i) Reflexión respecto al eje y:

______ $= 3($ $) + 1$

____

ii) Reflexión respecto al eje x:

______ $= 3($ $) + 1$

____

¿Obtienes las mismas ecuaciones que en los ejercicios *f*) e *i*)? Si no es así, encuentra el error.

NS8-1 Raíces cuadradas

$6 \times 6 = 36$; por tanto, $6^2 = 36$. El **cuadrado** de 6 es 36.

Ejemplos: $\left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{2}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{4}{49}$ $0{,}5^2 = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$

1. Calcula las potencias.

a) $7^2 =$ *49*   b) $9^2 =$ ____   c) $10^2 =$ ____   d) $8^2 =$ ____

e) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{\quad}{\quad}$ f) $\left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{\quad}{\quad}$ g) $0{,}2^2 =$ ____   h) $1{,}1^2 =$ ____

La **raíz cuadrada** de 25 es 5 porque $5^2 = 25$. Se expresa $\sqrt{25} = 5$.

Ejemplos: $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ porque $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ $\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$ porque $(0{,}1)^2 = 0{,}01$

2. Calcula las raíces cuadradas.

a) $\sqrt{49} =$ *7*   b) $\sqrt{16} =$ ____   c) $\sqrt{9} =$ ____   d) $\sqrt{36} =$ ____

e) $\sqrt{1} =$ ____   f) $\sqrt{100} =$ ____   g) $\sqrt{81} =$ ____   h) $\sqrt{64} =$ ____

i) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\quad}{\quad}$ j) $\sqrt{\frac{49}{100}} = \frac{\quad}{\quad}$ k) $\sqrt{0{,}09} =$ ____   l) $\sqrt{1{,}44} =$ ____

3. Calcula las raíces cuadradas y después multiplica, divide, suma o resta.

a) $\sqrt{1} + \sqrt{64} =$ b) $\sqrt{81} - \sqrt{25}$ c) $\sqrt{36} : \sqrt{4}$ d) $\sqrt{25} + \sqrt{16} \times \sqrt{9}$

= 1 + 8 =

= 9

4. Calcula las dos expresiones. Después, escribe = o ≠ en el recuadro.

a) $\sqrt{4 \times 9}$ $\boxed{=}$ $\sqrt{4} \times \sqrt{9} =$ b) $\sqrt{9 + 16}$ $\boxed{}$ $\sqrt{9} + \sqrt{16} =$

$= \sqrt{36} =$ $= 2 \times 3 =$

$= 6$ $= 6$

c) $\sqrt{169 - 25}$ $\boxed{}$ $\sqrt{169} - \sqrt{25} =$ d) $\sqrt{100 : 4}$ $\boxed{}$ $\sqrt{100} : \sqrt{4} =$

5. a) Calcula las potencias.

i) $5^2 =$ ________ ii) $11^2 =$ ________ iii) $12^2 =$ ________ iv) $3^2 =$ ________

$(-5)^2 =$ ________ $(-11)^2 =$ ________ $(-12)^2 =$ ________ $(-3)^2 =$ ________

b) Escribe *positivo* o *negativo*.

i) El cuadrado de un número positivo es un número __________________.

ii) El cuadrado de un número negativo es un número __________________.

> Todos los números positivos tienen una raíz cuadrada positiva y una raíz cuadrada negativa.
> Ejemplo: $(4)^2 = 16$ y $(-4)^2 = 16$, por tanto, 4 y -4 son raíces cuadradas de 16.

6. Escribe las dos raíces cuadradas de los siguientes números.

a) 81 b) 49 c) 25 d) 0,16

9 y *−9* _____ y _____ _____ y _____ _____ y _____

7. Escribe las soluciones de las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 = 1$ b) $x^2 = 9$ c) $x^2 = 121$ d) $x^2 = 0{,}04$

$x =$ *1* y *−1* $x =$ ____ y _____ $x =$ ____ y _____ $x =$ ____ y _____

> La ecuación $x^2 = 81$ tiene dos soluciones: $x = 9$ y $x = -9$. Para indicar que la solución puede ser positiva o negativa, se escribe ± 9.
>
> $x^2 = 81$ Comprobación: $x^2 = 81$
>
> $x = 9$ y $x = -9$ $(9)^2 = 81$ ✓
>
> $x = \pm 9$ $(-9)^2 = 81$ ✓

8. Resuelve las ecuaciones.

a) $x^2 = 144$ b) $x^2 = 9$ c) $x^2 = \frac{36}{49}$ d) $x^2 = 0{,}09$

$x = 12$ y $x = -12$

$x = \pm 12$

e) $x^2 + 5 = 41$ f) $4x^2 - 6 = 10$ g) $x^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ **Extra ▶** $\frac{2}{3}x^2 - 15 = 1\frac{2}{3}$

9. El patio de Julia es cuadrado y tiene un área de 49 m^2. ¿Cuál es su perímetro?

10. Una postal cuadrada tiene un área de 36 cm^2. Katia dice que la longitud de un lado puede ser 6 cm o −6 cm. ¿En qué se equivoca Katia?

La **raíz cuadrada positiva** de un número se considera su raíz principal y se expresa $\sqrt{36} = 6$.
Para indicar la raíz cuadrada negativa, se escribe $-\sqrt{36} = -6$.
Para indicar tanto la raíz cuadrada positiva como la negativa, se escribe $\pm\sqrt{36} = \pm 6$.

11. Calcula.

a) $-\sqrt{100} =$ *–10* b) $\pm\sqrt{121} =$ ______ c) $\sqrt{0{,}0144} =$ ______ d) $\pm\sqrt{1} =$ ______

e) $\pm\sqrt{30-5} =$
$= \pm\sqrt{25} =$
$= \pm 5$

f) $-\sqrt{81} - \sqrt{1}$

g) $\pm\sqrt{29+7}$

h) $\sqrt{36} + \sqrt{1} - \sqrt{25}$

Como el resultado de la ecuación $x^2 = 49$ puede ser positivo o negativo, se escribe $x = \pm\sqrt{49} = \pm 7$.

12. Resuelve las ecuaciones.

a) $x^2 = 4$
$x = \pm\sqrt{4}$
$x = \pm 2$

b) $x^2 = 25$

c) $x^2 = \frac{1}{100}$

d) $x^2 = 1{,}44$

13. a) Calcula respetando la jerarquía de las operaciones.

i) $\left(\sqrt{16}\right)^2 =$
$= (4)^2 =$
$= 16$

ii) $\left(\sqrt{100}\right)^2$

iii) $\left(\sqrt{64}\right)^2$

iv) $\left(\sqrt{81}\right)^2$

b) ¿Qué observas en los resultados del ejercicio anterior?

14. a) Para despejar x, eleva al cuadrado los dos lados de las ecuaciones. Primero, agrupa los términos similares.

i) $\sqrt{x} = 8$
$\left(\sqrt{x}\right)^2 = 8^2$
$x = 64$

ii) $\sqrt{x} = \frac{2}{5}$

iii) $5 - 2 = \sqrt{x}$

Extra ▶ $8 = \sqrt{x} + 7$

b) Comprueba los resultados del ejercicio *a*).

i) $\sqrt{x} = 8$
$\sqrt{64} = 8$ ✓

ii)

iii)

Extra ▶

NS8-2 Raíces cúbicas

$2 \times 2 \times 2 = 8$, por tanto $2^3 = 8$. El **cubo** de 2 es 8.

Ejemplos: $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$ $\qquad (-11)^3 = (-11)(-11)(-11) = -1.331$

1. Calcula las potencias.

a) $0^3 =$ *0* b) $3^3 =$ ______ c) $5^3 =$ ______ d) $6^3 =$ ______

e) $7^3 =$ ______ f) $8^3 =$ ______ g) $9^3 =$ ______ h) $10^3 =$ ______

2. a) Calcula las potencias.

i) $4^3 =$ *64* ii) $1^3 =$ ______ iii) $2^3 =$ ______ iv) $3^3 =$ ______

$(-4)^3 =$ *−64* $(-1)^3 =$ ______ $(-2)^3 =$ ______ $(-3)^3 =$ ______

b) Escribe *positivo* o *negativo*.

i) El cubo de un número positivo es un número ________________.

ii) El cubo de un número negativo es un número ________________.

La **raíz cúbica** de 8 es 2 porque $2^3 = 8$. Se expresa $\sqrt[3]{8} = 2$.

Ejemplos: $\sqrt[3]{125} = 5$ porque $5^3 = 125$ $\qquad \sqrt[3]{-64} = -4$ porque $(-4)^3 = -64$

3. Calcula las raíces cúbicas.

a) $\sqrt[3]{0} =$ *0* b) $\sqrt[3]{512} =$ ______ c) $\sqrt[3]{-216} =$ ______ d) $\sqrt[3]{-27} =$ ______

e) $\sqrt[3]{1} =$ ______ f) $\sqrt[3]{-1.000} =$ ______ g) $\sqrt[3]{-343} =$ ______ h) $\sqrt[3]{729} =$ ______

4. Escribe *positivo* o *negativo.*

a) La raíz cúbica de un número positivo es un número ________________.

b) La raíz cúbica de un número negativo es un número ________________.

5. Calcula respetando la jerarquía de las operaciones.

a) $\sqrt[3]{3-30} =$ b) $\sqrt[3]{56+8}$ c) $\sqrt[3]{-64} : \sqrt[3]{-8}$ d) $\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{-729}$

$= \sqrt[3]{-27} =$

$= -3$

6. Calcula las raíces cúbicas. Comprueba los resultados.

a) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{1.000}} = \dfrac{1}{10}$

$\dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{1.000}$ ✓

b) $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{8}} =$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{64}{343}} =$

7. a) Calcula las potencias.

i) $1^3 =$ _______________ ii) $3^3 =$ _______________ iii) $5^3 =$ _______________

$0{,}1^3 =$ _______________ $0{,}3^3 =$ _______________ $50^3 =$ _______________

$0{,}01^3 =$ _______________ $0{,}03^3 =$ _______________ $500^3 =$ _______________

b) Sabemos que $8^3 = 512$. Explica cómo podemos calcular rápidamente $0{,}8^3$; $0{,}08^3$; 80^3 y 800^3.
Pista: ¿Cuántas veces se desplaza la coma decimal y en qué dirección?

8. Calcula las potencias.

a) $0{,}5^3 =$ _______________ b) $0{,}02^3 =$ _______________ c) $(-70)^3 =$ _______________

d) $(-1{,}2)^3 =$ _______________ e) $100^3 =$ _______________ f) $0{,}11^3 =$ _______________

9. Calcula las raíces cúbicas.

a) $\sqrt[3]{0{,}729} =$ _________ b) $\sqrt[3]{-0{,}343} =$ _________ c) $\sqrt[3]{64.000} =$ _________

d) $\sqrt[3]{-1{,}331} =$ _________ e) $\sqrt[3]{-125.000} =$ _________ f) $\sqrt[3]{0{,}000027} =$ _________

10. Calcula las dos expresiones. Después, escribe $=$ o $\neq$ en el recuadro.

a) $\sqrt[3]{1 \times 8}$ $\boxed{=}$ $\sqrt[3]{1} \times \sqrt[3]{8} =$

$= \sqrt[3]{8} =$ $\quad = 1 \times 2 =$

$= 2$ $\quad = 2$

b) $\sqrt[3]{(-8) \times 27}$ $\boxed{}$ $\sqrt[3]{-8} \times \sqrt[3]{27}$

c) $\sqrt[3]{64} : \sqrt[3]{8}$ $\boxed{}$ $\sqrt[3]{64 : 8}$

Extra ▶ $\sqrt[3]{27 \times (-1.000) : (-125)}$ $\boxed{}$ $\sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{-1.000} : \sqrt[3]{-125}$

11. Ordena los números de cada ejercicio de menor a mayor.

a) $\sqrt[3]{1.000}$, 2^3, 200, 8^3, $\sqrt[3]{8}$

b) $\sqrt[3]{343}$, $\sqrt[3]{-512}$, $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt[3]{64}$

Extra ▶ 0,5; $\sqrt[3]{\dfrac{1}{64}}$; $1{,}2^3$; $0{,}3^3$; $\sqrt[3]{0{,}512}$

12. a) Calcula usando la jerarquía de las operaciones.

i) $\left(\sqrt[3]{8}\right)^3 =$

$= (2)^3 =$

$= 8$

ii) $\left(\sqrt[3]{-1}\right)^3$

iii) $\left(\sqrt[3]{-27}\right)^3$

iv) $\left(\sqrt[3]{1.000}\right)^3$

b) ¿Qué observas en los resultados de los ejercicios anteriores?

13. Para despejar x, eleva al cubo los dos lados de las ecuaciones. Primero, agrupa los términos semejantes.

a) $\sqrt[3]{x} = 5$

$\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = 5^3$

$x = 125$

b) $\sqrt[3]{x} = -1,2$

c) $\sqrt[3]{x} = 4 - 6$

Extra ▶ $\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

Sara resuelve la ecuación $x^3 = 216$.

$x^3 = 216$	Comprobación:
$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{216}$	$x^3 = 216$
$x = \sqrt[3]{216}$	$(6)^3 = 216$ ✓
$x = 6$	

Tomás resuelve la ecuación $x^3 - 7 = -71$.

$x^3 - 7 = -71$	Comprobación:
$x^3 = -71 + 7$	$x^3 - 7 = -71$
$x^3 = -64$	$(-4)^3 - 7 =$
$x = \sqrt[3]{-64}$	$= -64 - 7 =$
$x = -4$	$= -71$ ✓

14. Resuelve las ecuaciones.

a) $x^3 = 8$

b) $x^3 = -343$

c) $x^3 = 1.000$

d) $x^3 = -\frac{64}{729}$

e) $x^3 - 6 = -70$

f) $2x^3 - 50 = 200$

g) $x^3 + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

h) $\frac{1}{3}x^3 + 12 = -60$

15. Una caja de cartón con forma de cubo tiene un volumen de 1,728 m^3. ¿Cuál es la longitud de un lado de la caja?

16. Pedro dice que la solución de $x^3 = 216$ es $x = \pm 6$. ¿En qué se equivoca?

NS8-3 Números racionales

Para representar un conjunto de números, se usan llaves { }.

{0, 1, 2, 3...} es el conjunto de los números naturales. Los números naturales no tienen partes decimales o fraccionarias. No pueden ser números negativos. Ejemplos: 9, 74, 244

{... −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3...} es el conjunto de los números enteros. Los enteros no tienen partes decimales o fraccionarias. Pueden ser números negativos. Ejemplos: −6, 52, −768

1. Clasifica los números. Escribe *número natural*, *número entero*, *ambos* o *ninguno*.

a) 4 ______________________ b) 12,5 ______________________

c) −11 ______________________ d) $-6\frac{3}{5}$ ______________________

e) 275 ______________________ f) −61 ______________________

2. ¿Las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas? Si es falsa, indica un contraejemplo.

a) Todos los números naturales son enteros.

b) Todos los enteros son números naturales.

3. Expresa los siguientes enteros en forma de fracción.

a) $7 = \frac{7}{1}$ b) $-65 =$ c) $670 =$ d) $-5.012 =$

4. Expresa los siguientes números mixtos en forma de fracción.

a) $8\frac{4}{9} = \frac{76}{9}$ b) $6\frac{2}{3} =$ c) $5\frac{6}{7} =$ d) $-4\frac{1}{6} =$

5. Expresa los siguientes porcentajes en forma de fracción.

a) $41\% = \frac{41}{100}$ b) $65\% =$ c) $-7\% =$ d) $210\% =$

Cualquier número que pueda expresarse en forma de fracción es un **número racional**.

6. Explica por qué los enteros, los números mixtos y los porcentajes pertenecen al conjunto de los números racionales.

7. Demuestra que los siguientes números decimales son racionales expresándolos en forma de fracción decimal.

a) $-1{,}6 = -\frac{16}{10}$ b) $0{,}05 =$ c) $0{,}305 =$ d) $-47{,}49 =$

8. Clasifica los números escribiéndolos en la parte correspondiente del diagrama.

$\cancel{1\frac{3}{4}}$	-4	38
-99	526	3,25
0	$-7{,}5$	-200

Extra ▶

3%	100%	$-\frac{10}{2}$

Números racionales

$1\frac{3}{4}$

Números enteros

Números naturales

9. a) Haz una lista de los números naturales menores que 5. ______________________

b) Haz una lista de los enteros entre -3 y 4. ______________________

c) Haz una lista de cinco números racionales entre 1 y 2. ______________________

Extra ▶ Marta dice que puede hacer una lista de todos los números racionales entre el 1 y el 2. ¿Crees que es así? Justifica tu respuesta.

10. Indica el conjunto de números (naturales, enteros o racionales) que mejor describe la situación. Proporciona dos ejemplos.

a) Puntuación en un partido de golf *Enteros como -2 (bajo par) y $+1$ (sobre par)*

b) Número de entradas vendidas para un concierto

c) Precios en las etiquetas de una tienda de ropa

d) Temperatura redondeada a los grados

e) Número de animales de compañía en una casa

Un número puede pertenecer a más de un conjunto de números.

Ejemplos: El 2 pertenece a los conjuntos de los naturales, los enteros y los racionales.

$\sqrt[3]{-27} = -3$, por tanto $\sqrt[3]{-27}$ pertenece al conjunto de los enteros y al de los racionales.

11. Indica todos los conjuntos a los que pertenecen los siguientes números.

a) 3,08 b) 8 c) -9 d) $2\frac{1}{2}$

e) 0 f) $\sqrt{1{,}44}$ g) $\sqrt{25}$ h) $\sqrt[3]{-64}$

12. ¿Verdadero (V) o falso (F)?

a) Todos los números enteros son racionales. ____

b) Todos los números racionales son enteros. ____

c) Todos los números racionales son naturales. ____

d) Todos los números naturales son racionales. ____

NS8-4 Expresar fracciones como decimales periódicos

1. Encuentra una fracción decimal equivalente. Después, expresa la fracción como un número decimal.

a) $\frac{9}{25} = \frac{36}{100} = 0,36$ b) $\frac{3}{4} =$ c) $\frac{17}{40} =$

2. Usa la división larga para expresar las fracciones como números decimales. Divide hasta que el resto sea 0.

a) $\frac{9}{25} =$ 0,36 b) $\frac{17}{20} =$ ______ c) $\frac{5}{8} =$ ______

	9,	0	0	:	2	5	=	0,	3	6
−	7	5	↓							
	1	5	0							
−	1	5	0							
			0							

3. a) Calcula 2 : 3 escribiendo 2 como 2,0; 2,00 y 2,000.

2,0 : 3 2,00 : 3 2,000 : 3

2,0 : 3 = 2,00 : 3 = 2,000 : 3 =

b) Si continúas la división para calcular 2,0000 : 3, ¿cuál es la siguiente cifra del cociente? ¿Por qué?

c) Si continúas la división, ¿en algún momento obtienes resto 0? ¿Por qué?

Un **decimal periódico** es un decimal con una cifra o grupo de cifras que se repiten indefinidamente. Para indicar la cifra o el grupo de cifras que se repiten, se usa un arco. Ejemplo: $0{,}45454\ldots = 0{,}\overset{\frown}{45}$

Un **decimal exacto** es un decimal con un número finito de cifras. Ejemplos: 0,36; 6,685; 4,7

4. Expresa los siguientes decimales periódicos con seis cifras decimales.

a) $0{,}\overset{\frown}{7} =$ *0,777777…* b) $-0{,}\overset{\frown}{84} =$ ______ c) $1{,}\overset{\frown}{822} =$ ______

d) $5{,}3\overset{\frown}{60} =$ ______ e) $4{,}4\overset{\frown}{8} =$ ______ f) $-8{,}0\overset{\frown}{731} =$ ______

5. Expresa los siguientes decimales periódicos usando el arco.

a) $0{,}222222\ldots =$ *$0{,}\overset{\frown}{2}$* b) $-0{,}949494\ldots =$ ______ c) $-6{,}0868686\ldots =$ ______

d) $4{,}754754\ldots =$ ______ e) $8{,}466666\ldots =$ ______ f) $-2{,}109090\ldots =$ ______

g) $0{,}101010\ldots =$ ______ h) $7{,}777777\ldots =$ ______ i) $-0{,}008888\ldots =$ ______

6. a) Expresa las siguientes fracciones como números decimales con la ayuda de la calculadora. Usa el arco para los decimales periódicos.

i) $\frac{5}{9} =$ *$0{,}\overset{\frown}{5}$* ii) $\frac{7}{25} =$ ______ iii) $\frac{4}{15} =$ ______

iv) $\frac{6}{11} =$ ______ v) $-\frac{5}{16} =$ ______ vi) $-\frac{17}{20} =$ ______

b) ¿Qué fracciones del ejercicio *a*) se pueden expresar como decimales exactos?

c) Escribe los denominadores de las fracciones del ejercicio *b*) como productos de solo doses y/o cincos. ¿Puedes hacer lo mismo con las fracciones de *a*) que se expresan como decimales periódicos?

Para determinar si una fracción se puede expresar como un decimal exacto o como un decimal periódico:

Paso 1: Simplificamos la fracción.

Paso 2: Observamos el denominador. Si se puede expresar como el producto de solo doses y/o cincos, el decimal es exacto. Si no se puede expresar como el producto de solo doses y/o cincos, el decimal es periódico.

7. Deduce si el decimal es exacto. Compruébalo con una calculadora. Pista: Primero, simplifica la fracción.

a) $\frac{10}{16}$ b) $\frac{21}{36}$ c) $\frac{63}{99}$ d) $-\frac{45}{250}$ e) $-\frac{35}{75}$ f) $\frac{9}{36}$

8. ¿Todos los números racionales se pueden expresar como un decimal con cifras que se repiten indefinidamente? Pista: $5{,}1 = 5{,}10 = 5{,}100\ldots$

NS8-5 Expresar decimales periódicos como fracciones

1. Expresa las siguientes fracciones como decimales con la ayuda de la calculadora. Usa el arco para indicar el período.

a) $\frac{1}{9} = \underline{\ \mathit{0,}\overset{\frown}{\mathit{1}}\ }$　　b) $-\frac{5}{9} =$ ________　　c) $\frac{31}{99} =$ ________

d) $\frac{437}{999} =$ ________　　e) $5\frac{2}{9} =$ ________　　f) $-4\frac{68}{999} =$ ________

2. Encuentra una fracción equivalente con un denominador que sea 9, 99 o 999. Después, expresa la fracción como un decimal.

a) $\frac{13}{33} = \frac{\mathit{39}}{\mathit{99}} = \mathit{0,}\overset{\frown}{\mathit{39}}$　　b) $-\frac{4}{11} =$　　c) $\frac{25}{333} =$

d) $\frac{14}{18} =$　　e) $3\frac{48}{66} =$　　f) $-2\frac{15}{27} =$

3. Describe el patrón que se reproduce al expresar una fracción con denominador 9, 99 o 999 como un decimal.

4. Usa el patrón del ejercicio 3 para expresar los siguientes decimales como fracciones o números mixtos.

a) $0,\overset{\frown}{5} =$　　b) $0,\overset{\frown}{74} =$　　c) $7,\overset{\frown}{26} =$

d) $0,\overset{\frown}{321} =$　　e) $6,4444\ldots =$　　f) $-2,6363\ldots =$

5. Expresa los siguientes decimales como fracciones decimales.

a) $0,5 =$　　b) $0,96 =$　　c) $3,001 =$

6. Escribe *exacto* o *periódico*.

a) Una fracción simplificada tiene 9.999 como denominador. Su representación decimal es ________.

b) Una fracción simplificada tiene 1.000.000 como denominador. Su representación decimal es ____________.

7. Expresa los siguientes decimales como fracciones o números mixtos. Simplifica los resultados.

a) $0,4 = \frac{\mathit{4}}{\mathit{10}} = \frac{\mathit{2}}{\mathit{5}}$　　b) $2,\overset{\frown}{4} =$　　c) $4,35 =$

d) $7,\overset{\frown}{02} =$　　e) $-0,\overset{\frown}{456} =$　　f) $-0,316 =$

8. ¿Todos los decimales exactos y los decimales periódicos son números racionales? Justifica tu respuesta.

9. Multiplica desplazando la coma decimal las posiciones necesarias. Pista: Escribe las primeras cifras del decimal periódico.

a) $0,\widehat{8} \times 10 =$

$= 0,88888\ldots \times 10 =$

$= 8,8888\ldots$ o $8,\widehat{8}$

b) $-1,\widehat{7} \times 10$

c) $0,\widehat{26} \times 100$

d) $-6,\widehat{48} \times 100$

10. Escribe la potencia de 10 que verifica la igualdad.

a) $0,5555\ldots \times$ ___*10*___ $= 5,555\ldots$

b) $0,8787\ldots \times$ ________ $= 87,87\ldots$

c) $1,6666\ldots \times$ ________ $= 16,666\ldots$

d) $4,135135\ldots \times$ ________ $= 4.135,135\ldots$

Para expresar $0,\widehat{6}$ en forma de fracción: Siendo $x = 0,66666\ldots$

Paso 1: Multiplicamos x por 10 porque se repite 1 cifra. (Multiplicamos x por 100 si se repiten 2 cifras.)

Paso 2: Restamos x a $10x$ para eliminar la parte que se repite.

Paso 3: Despejamos la x y simplificamos la fracción.

$$\begin{array}{r} 10x = 6,66666\ldots \\ -\ x = 0,66666\ldots \\ \hline 9x = 6,00000\ldots \end{array}$$

$x = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$ Por tanto, $0,\widehat{6} = \dfrac{2}{3}$.

11. Expresa los números decimales como fracciones.

a) $0,\widehat{4}$; siendo $x =$

$10x =$

$-\ x =$

$9x =$

$x =$

b) $0,\widehat{65}$; siendo $x =$

$100x =$

$-\ x =$

$99x =$

$x =$

c) $0,\widehat{3}$

d) $0,\widehat{96}$

e) $0,\widehat{715}$

f) $0,\widehat{384}$

12. Expresa los siguientes decimales como fracciones. Expresa el resultado como un número mixto.

a) $3,\widehat{2}$; siendo $x =$

$10x =$

$-\ x =$

$9x =$

$x =$

b) $5,\widehat{43}$; siendo $x =$

$100x =$

$-\ x =$

$99x =$

$x =$

c) $-12,\widehat{4}$

d) $-8,\widehat{29}$

NS8-6 Operaciones con decimales periódicos

1. a) Suma alineando las posiciones decimales.

i) $0{,}8 + 0{,}5$ ii) $0{,}88 + 0{,}55$ iii) $0{,}888 + 0{,}555$

	1																				
	0,	*8*																			
+	*0,*	*5*																			
	1,	*3*																			

b) Usa el patrón de *a*) para deducir el resultado de $0{,}\overset{\frown}{8} + 0{,}\overset{\frown}{5}$. ____________________

2. a) Expresa $0{,}\overset{\frown}{8}$ y $0{,}\overset{\frown}{5}$ como fracciones. $0{,}\overset{\frown}{8} = \underline{\quad}$ $0{,}\overset{\frown}{5} = \underline{\quad}$

b) Suma las fracciones de *a*). $\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\qquad}$

c) Expresa el resultado de *b*) como un número mixto y después, como un decimal. ________ = ________

d) ¿Es correcta tu deducción del ejercicio *1 b*)? ___________

e) ¿Cuál es el problema al intentar calcular $0{,}\overset{\frown}{8} + 0{,}\overset{\frown}{5}$ alineando las posiciones decimales? ¿Qué ventajas tiene expresar los decimales como fracciones?

Para sumar decimales periódicos:

Ejemplo: $0{,}\overset{\frown}{4} + 0{,}\overset{\frown}{79}$

Paso 1: Expresamos los decimales como fracciones.

$$0{,}\overset{\frown}{4} = \frac{4}{9} \qquad 0{,}\overset{\frown}{79} = \frac{79}{99}$$

Paso 2: Sumamos las fracciones.

$$\frac{4}{9} + \frac{79}{99} = \frac{44}{99} + \frac{79}{99} =$$

$$= \frac{123}{99} =$$

$$= 1\frac{24}{99} =$$

Paso 3: Expresamos el resultado como decimal.

$$= 1{,}\overset{\frown}{24}$$

3. Calcula.

a) $0{,}\overset{\frown}{6} + 0{,}\overset{\frown}{7}$ b) $0{,}\overset{\frown}{85} + 0{,}\overset{\frown}{6}$ c) $0{,}\overset{\frown}{745} + 0{,}\overset{\frown}{679}$

d) $0{,}\overset{\frown}{63} - 0{,}\overset{\frown}{47}$ e) $0{,}\overset{\frown}{512} - 0{,}\overset{\frown}{4}$ f) $0{,}31 - 0{,}\overset{\frown}{6}$

Extra ▶ $0{,}\overset{\frown}{1} - 0{,}\overset{\frown}{2} + 0{,}\overset{\frown}{03} - 0{,}\overset{\frown}{04}$

4. a) Multiplica.

i) $0{,}8 \times 4 =$ ii) $0{,}88 \times 4 =$ iii) $0{,}888 \times 4 =$

b) Usa el patrón de *a*) para deducir el resultado de $0{,}\overset{\frown}{8} \times 4$. ¿Cuál es el problema al intentar multiplicar $0{,}\overset{\frown}{8} \times 4$ como si el decimal fuera un número natural?

5. a) Expresa $0{,}\overset{\frown}{8}$ en forma de fracción. $0{,}\overset{\frown}{8} = \frac{\_\_}{\_\_}$

b) Multiplica la fracción de *a*) por 4. $\frac{\_\_}{\_\_} \times 4 = \frac{\_\_}{\_\_}$

c) Expresa el resultado de *b*) como un número mixto y después, como un decimal.

________ = ________

d) ¿Es correcta tu deducción del ejercicio *4 b*)? ________

6. Expresa los decimales como fracciones. Multiplica o divide. Expresa el resultado como un número mixto y después, como un decimal.

a) $0{,}\overset{\frown}{4} \times 7$ b) $0{,}\overset{\frown}{43} \times 3$ c) $0{,}\overset{\frown}{6} \times 0{,}\overset{\frown}{3}$

d) $0{,}\overset{\frown}{7} : 0{,}\overset{\frown}{2}$ e) $0{,}\overset{\frown}{6} : 0{,}\overset{\frown}{5}$ f) $0{,}\overset{\frown}{14} : 0{,}\overset{\frown}{18}$

Para expresar una fracción como porcentaje:	Ejemplo: $\frac{5}{9} = \_\_\_\_\%$
Paso 1: Expresamos la fracción como un decimal.	$\frac{5}{9} = 0{,}55555\ldots$
Paso 2: Multiplicamos por 100.	$0{,}55555\ldots \times 100 = 55{,}55555\ldots$
Paso 3: Redondeamos a las unidades.	$\frac{5}{9} = 55{,}\overset{\frown}{5}\% \approx 56\%$

7. Expresa las siguientes fracciones como porcentajes.

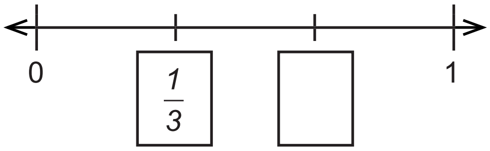
a) $\frac{7}{9} =$ b) $\frac{3}{11} =$ c) $\frac{12}{18} =$

8. En dos librerías, comienzan las rebajas. En Libros Luis, rebajan $\frac{1}{3}$ el precio de todos los artículos. En Lecturas Lola, el descuento es del 30%. ¿Qué tienda ofrece el mayor descuento?

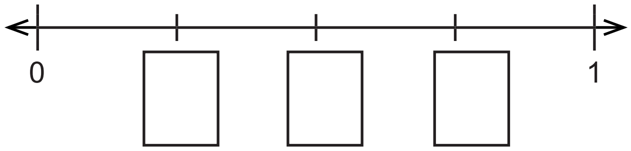
NS8-7 Números racionales en la recta numérica

1. Indica las fracciones marcadas en la recta numérica.

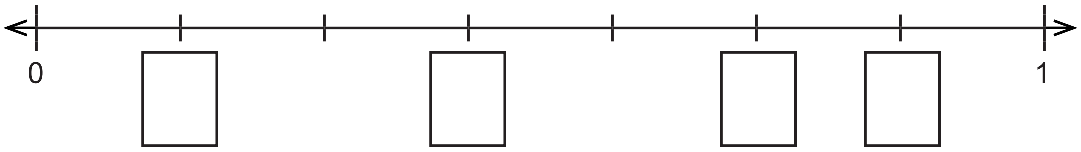
a)



b)



c)

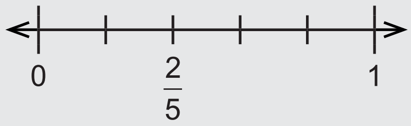


Para situar esta fracción en la recta numérica:

Paso 1: Dividimos con una regla el intervalo de 0 a 1 en 5 partes iguales.

Paso 2: Contamos 2 partes empezando en el 0 y marcamos.

Ejemplo: $\frac{2}{5}$



2. Sitúa las fracciones en la recta numérica.

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{5}{6}$

d) $5\frac{3}{8}$

e) $2\frac{4}{5}$

3. Sitúa los dos números en la recta numérica. ¿Cuál es mayor?

a) $7\frac{3}{5}$ y $\sqrt{49}$

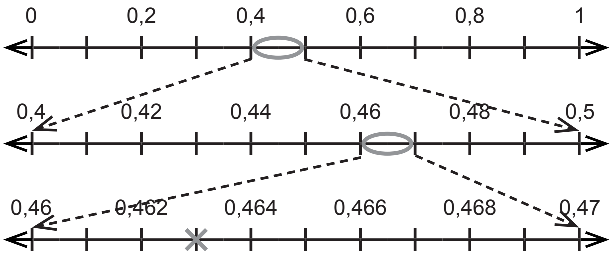
_______ < _______

b) $-3\frac{1}{4}$ y $\sqrt[3]{-27}$

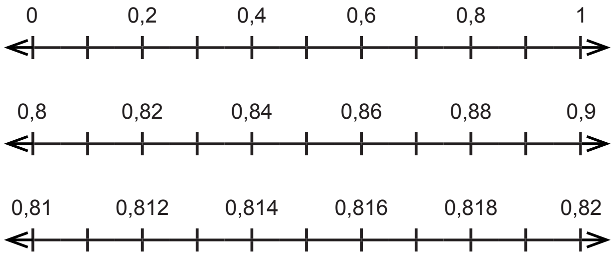
_______ < _______

4. Sitúa los números decimales en la recta numérica.

a) 0,463



b) 0,815



5. a) Explica por qué los decimales exactos del ejercicio 4 pueden representarse por un punto en la recta numérica inferior.

b) Explica por qué un decimal periódico como $0{,}\widehat{5} = 0{,}555\ldots$ no puede representarse por un punto en la recta numérica inferior.

Para situar este decimal periódico en una recta numérica:

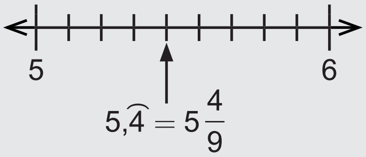
Paso 1: Expresamos el decimal periódico como fracción.

Paso 2: Dividimos con una regla el intervalo de 5 a 6 en 9 partes iguales.

Paso 3: Contamos 4 partes empezando en el 5 y marcamos.

Ejemplo: $5{,}\widehat{4}$

$5{,}\widehat{4} = 5\frac{4}{9}$



6. Expresa los decimales como fracciones irreducibles. Sitúa las fracciones en la recta numérica.

a) $0{,}\widehat{6} =$

b) $0{,}\widehat{18} =$

c) $2{,}\widehat{45} =$

7. ¿Entre qué dos valores está el número decimal si nos fijamos en las unidades, las décimas y las centésimas?

		Unidades	**Décimas**	**Centésimas**
a)	0,487	*0 y 1*	*0,4 y 0,5*	*0,48 y 0,49*
b)	5,628			
c)	$0{,}\widehat{3} =$			
d)	$12{,}\widehat{67} =$			

8. ¿Todos los números racionales se pueden situar en la recta numérica? Justifica tu respuesta.

NS8-8 Números irracionales

1. a) Expresa los siguientes decimales exactos como fracciones.

i) $0{,}24 = \dfrac{24}{100}$ ii) $0{,}7 =$ iii) $0{,}348 =$ iv) $5{,}09 =$

b) Expresa los siguientes decimales periódicos como fracciones.

i) $0{,}5555\ldots = \dfrac{5}{9}$ ii) $0{,}2828\ldots =$ iii) $0{,}\overset{\frown}{01} =$ iv) $5{,}\overset{\frown}{123} =$

c) Explica por qué 1,41421356… no es ni un decimal exacto ni un decimal periódico.

d) ¿Puedes expresar 1,41421356… en forma de fracción? Justifica tu respuesta.

Los números racionales son números que pueden expresarse como fracciones. Los decimales exactos y los decimales periódicos son números racionales.

Los **números irracionales** son números que no pueden expresarse como fracciones. Las cifras decimales de los números irracionales son infinitas y no se repiten.

2. a) Rodea los números racionales.

0,21	0,656565…	3,14159…	$0{,}\overset{\frown}{3}$
0,818818881…	0,902	1,7	0,123456789…

b) Elige cuatro números de los rodeados en *a*) y completa las frases.

___________ es racional porque ____.

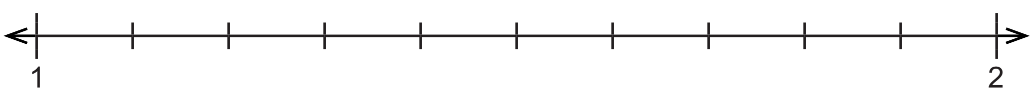
___________ es racional porque ____.

___________ es racional porque ____.

___________ es racional porque ____.

3. a) Sitúa los siguientes números en la recta numérica. Márcalos con un punto y una letra.

A. 1,1 **B.** $1{,}\overset{\frown}{5}$ **C.** 1,414213… **D.** $1\,\dfrac{7}{9}$



b) Indica un número racional entre A y C. ________

c) Indica un número racional entre B y D. ________

4. Calcula las raíces cuadradas y las raíces cúbicas.

a) $\sqrt{64} =$ ______ b) $\sqrt{25} =$ ______ c) $\sqrt[3]{27} =$ ______ d) $\sqrt[3]{-512} =$ ______

e) $\sqrt{0\ 09} =$ ______ f) $\sqrt[3]{-0{,}008} =$ ______ g) $\sqrt{\frac{1}{4}} = —$ h) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = —$

> Los **cuadrados perfectos** y los **cubos perfectos** son números cuyas raíces son números enteros.
>
> Ejemplos: Las raíces cuadradas de 25 son 5 y -5; por tanto, 25 es un cuadrado perfecto.
> La raíz cúbica de -8 es -2; por tanto, -8 es un cubo perfecto.

5. a) Rodea los cuadrados perfectos.

49 99 78 81 3,6

b) Rodea los cubos perfectos.

$\frac{1}{64}$ 216 495 -97 -729

6. a) Calcula $\sqrt{1}$ y $\sqrt{4}$. $\sqrt{1} =$ ______ $\sqrt{4} =$ ______

b) ¿Hay algún entero entre 1 y 2? ________

c) ¿Pueden $\sqrt{2}$ o $\sqrt{3}$ ser enteros? Justifica tu respuesta.

d) Calcula $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ con la ayuda de la calculadora. Escribe sus seis primeras cifras decimales.

$\sqrt{2} =$ ____________________… $\sqrt{3} =$ ____________________…

e) ¿Son $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ números racionales? Justifica tu respuesta.

> La raíz cuadrada de un cuadrado no perfecto es un número irracional. Ejemplo: $\sqrt{24}$ es irracional.
>
> La raíz cúbica de un cubo no perfecto es un número irracional. Ejemplo: $\sqrt[3]{10}$ es irracional.

7. ¿Los siguientes números son racionales o irracionales? Justifica tu respuesta.

a) $\sqrt{49}$ es *racional* porque $\sqrt{49} = 7$.

b) $\sqrt{12}$ es *irracional* porque *12 no es un cuadrado perfecto.*

c) $\sqrt[3]{-1.000}$ es ______________ porque ________________________________.

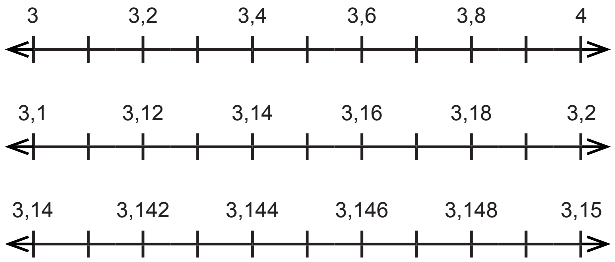
d) $\sqrt{200}$ e) $\sqrt{144}$ f) $\sqrt[3]{25}$ g) $\sqrt{\frac{1}{49}}$

8. Clasifica los siguientes números. Si es posible, calcula primero el número. Puedes marcar más de una categoría.

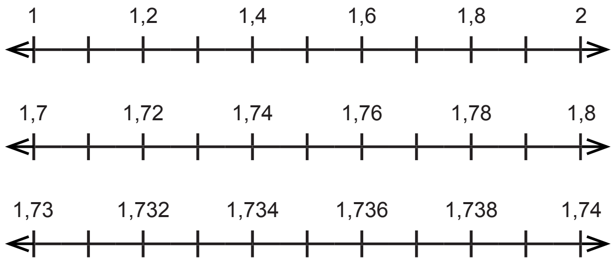
	Número	Número natural	Número entero	Número racional	Número irracional
a)	$\sqrt[3]{-8} = -2$		✓	✓	
b)	$\sqrt{121}$				
c)	$\sqrt[3]{6}$				
d)	$0,\widehat{48}$				
e)	0,010010001…				
f)	9,4				
g)	$-\sqrt{81}$				
h)	$\sqrt{8}$				

9. Las cifras decimales de los números irracionales son infinitas y no se repiten.

a) $\pi = 3,14159\ldots$



b) $\sqrt{3} = 1,73205\ldots$



10. Si dibujaras la recta numérica con intervalos cada vez más pequeños, ¿podrías representar por un punto los números irracionales del ejercicio 9? Justifica tu respuesta.

11. Usa la calculadora para expresar estos números irracionales con 5 cifras decimales. ¿Entre qué dos valores se sitúa el número irracional si nos fijamos en las unidades, las décimas y las centésimas?

		Equivalente decimal (hasta 5 cifras)	Unidades	Décimas	Centésimas
a)	$\sqrt{12}$	*3,46410…*	*3 y 4*	*3,4 y 3,5*	*3,46 y 3,47*
b)	$\sqrt{138}$				
c)	$\sqrt[3]{417}$				
d)	$\sqrt[3]{734}$				
Extra ▶	$\sqrt[3]{-185}$				

NS8-9 Comparar números racionales y números irracionales

1. ¿Cuál es el cuadrado perfecto de los siguientes números naturales? Completa la tabla.

Número natural	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cuadrado perfecto	*1*	*4*								

2. ¿Entre qué cuadrados perfectos están los siguientes números? ¿Entre qué números naturales están las raíces cuadradas?

a) 13 está entre *9* y *16*

o 13 está entre 3^2 y 4^2

por tanto, $\sqrt{13}$ está entre *3* y *4*

b) 33 está entre ______ y ______

o 33 está entre ______ y ______

por tanto, $\sqrt{33}$ está entre ______ y ______

c) $\sqrt{7}$ d) $\sqrt{91}$ e) $\sqrt{70}$ **Extra ▶** $\sqrt{130}$

3. ¿Cuál es el cubo perfecto de los siguientes números naturales? Completa la tabla.

Número natural	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cubo perfecto	*1*	*8*								

4. ¿Entre qué cubos perfectos están los siguientes números? ¿Entre qué enteros están las raíces cúbicas?

a) 184 está entre *125* y *216*

o 184 está entre 5^3 y 6^3

por tanto, $\sqrt[3]{184}$ está entre *5* y *6*

b) 789 está entre ______ y ______

o 789 está entre ______ y ______

por tanto, $\sqrt[3]{789}$ está entre ______ y ______

c) $\sqrt[3]{101}$ d) $\sqrt[3]{-42}$ e) $\sqrt[3]{-480}$ f) $\sqrt[3]{25}$

$\sqrt{75}$ está entre 8 y 9; por tanto $\sqrt{75}$ tiene que ser mayor que 8 ($\sqrt{75} > 8$) y menor que 9 ($\sqrt{75} < 9$).

5. Encuentra los enteros entre los que están las raíces. Después, escribe $<$ o $>$ en los recuadros.

a) $\sqrt{7}$ $\boxed{<}$ 3

$\sqrt{7}$ está entre

2 y *3*

b) 8 $\boxed{\phantom{<}}$ $\sqrt{55}$

$\sqrt{55}$ está entre

______ y ______

c) 1 $\boxed{\phantom{<}}$ $\sqrt[3]{5}$

$\sqrt[3]{5}$ está entre

______ y ______

d) $\sqrt[3]{-444}$ $\boxed{\phantom{<}}$ -8

$\sqrt[3]{-444}$ está entre

______ y ______

6. Ordena los números de los conjuntos de menor a mayor.

a) $\left\{\sqrt[3]{585},\ 8,\ \sqrt{61}\right\}$

b) $\left\{\sqrt{38},\ \sqrt{26},\ 5,\ \sqrt[3]{216}\right\}$

Para comparar expresiones que incluyen números irracionales, encontramos los enteros entre los que están los números irracionales. Después, calculamos las expresiones dentro de los intervalos.

Ejemplo: $\sqrt{10}+5$ $\boxed{\phantom{<}}$ $\sqrt{5}+10$

$\sqrt{10}$ está entre 3 y 4; por tanto, $\sqrt{10}+5$ está entre $\overset{3+5}{8}$ y $\overset{4+5}{9}$.

$\sqrt{5}$ está entre 3 y 4; por tanto, $\sqrt{5}+10$ está entre $\underset{2+10}{12}$ y $\underset{3+10}{13}$.

Por tanto, $\sqrt{10}+5$ $\boxed{<}$ $\sqrt{5}+10$.

7. Calcula las dos expresiones usando intervalos. Escribe $<$ o $>$ en los recuadros para compararlas.

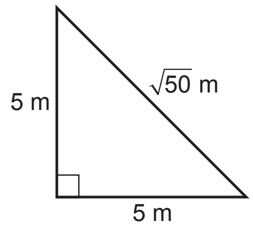
a) $\sqrt{3}+6$ $\boxed{\phantom{<}}$ $3+\sqrt{6}$ b) $6+\sqrt{7}$ $\boxed{\phantom{<}}$ $\sqrt{6}+7$ c) $10-\sqrt[3]{18}$ $\boxed{\phantom{<}}$ $18-\sqrt[3]{10}$

d) $5\times\sqrt{18}$ $\boxed{\phantom{<}}$ 18 e) $5+\sqrt[3]{60}$ $\boxed{\phantom{<}}$ $\sqrt[3]{817}-2$ f) $\dfrac{\sqrt[3]{480}}{4}$ $\boxed{\phantom{<}}$ $\dfrac{\sqrt{30}}{2}$

8. ¿Entre qué dos valores están las siguientes expresiones si nos fijamos en las unidades, en las décimas y en las centésimas?

		Unidades	Décimas	Centésimas
a)	$\pi = 3{,}14159\ldots$	*3 y 4*	*3,1 y 3,2*	*3,14 y 3,15*
b)	$\pi + 5$			
c)	2π			
d)	$3\pi - 6$			

9. Yu tiene un jardín triangular cuyos lados miden las longitudes indicadas.



a) Formula una expresión para calcular el perímetro del jardín de Yu.

b) Yu tiene 17 m de valla. ¿Es suficiente para rodear el jardín?

c) El perímetro del jardín de Julia mide $8+\sqrt{70}$ m. ¿El jardín de Julia es más grande que el jardín de Yu?

10. El número áureo es un número importante. El número áureo equivale a $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

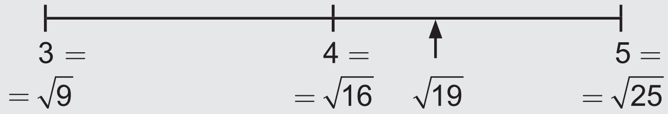
a) ¿Entre qué dos valores está $\sqrt{5}$ si nos fijamos en las unidades, las décimas y las centésimas? Usa los intervalos de $\sqrt{5}$ para estimar el valor del número áureo.

	Unidades	Décimas	Centésimas
$\sqrt{5} = 2{,}23606...$			
$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$			

b) Explica por qué el número áureo es un número irracional.

El cuadrado perfecto más próximo a 19 es 16; por tanto, el número natural más próximo a $\sqrt{19}$ es 4.

En la recta numérica, $\sqrt{19}$ está a la derecha de 4.



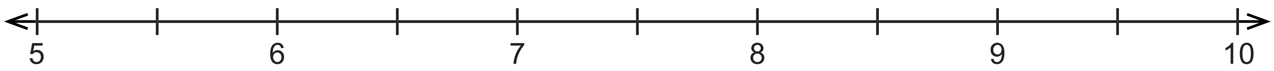
11. a) El número natural más próximo a $\sqrt{34}$ es _6_. En la recta numérica, $\sqrt{34}$ está _a la izquierda de 6_.

b) El número natural más próximo a $\sqrt{71}$ es ___. En la recta numérica, $\sqrt{71}$ está ______________.

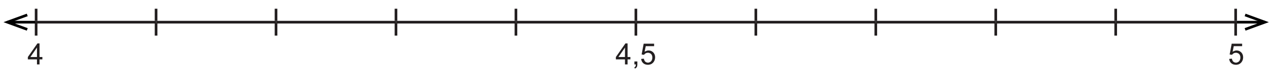
c) El número natural más próximo a $\sqrt[3]{26}$ es ___. En la recta numérica, $\sqrt[3]{26}$ está ______________.

d) El número natural más próximo a $\sqrt[3]{349}$ es ___. En la recta numérica, $\sqrt[3]{349}$ está ____________.

12. Sitúa $\sqrt{58}$, $\sqrt{40}$, $\sqrt{90}$, $\sqrt{43}$, $\sqrt{30}$ y $\sqrt{51}$ en la recta numérica.



13. a) Sitúa $\sqrt{16}$, $\sqrt{23}$, $\sqrt{25}$ y $\sqrt{19}$ en la recta numérica.



b) ¿ $\sqrt{19}$ está más próximo a 4; 4,5 o 5? ________

c) ¿ $\sqrt{23}$ está más próximo a 4; 4,5 o 5? ______

Para simplificar una expresión, los números irracionales se pueden tratar como variables.

Del mismo modo que $3x + 5x = 8x$, $3\pi + 5\pi = 8\pi$ y $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

14. Simplifica las siguientes expresiones.

a) $5\sqrt{7} + 8\sqrt{7} =$

$= 13\sqrt{7}$

b) $9\sqrt{6} - 2\sqrt{6}$

c) $4\pi + 7\pi - 6\pi$

d) $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4}$

e) $8\left(\sqrt{3} + 4\right)$

f) $9(2\pi + 1)$

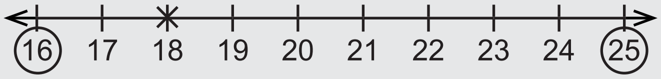
g) $3\left(\sqrt{5} - 4\right) - 4\sqrt{5}$

h) $11\sqrt[3]{9} - \left(2\sqrt[3]{9} + 5\sqrt[3]{9}\right)$

NS8-10 Aproximación racional de números irracionales

18 está entre $16 = 4^2$ y $25 = 5^2$. Para hacer una aproximación de $\sqrt{18}$, usamos un número mixto.

Primero, trazamos la recta numérica.



18 es $\frac{2}{9}$ de la distancia entre 16 y 25. Por tanto, $\sqrt{18}$ es aproximadamente $\frac{2}{9}$ de la distancia entre 4 y 5.

Por tanto, $\sqrt{18} \approx 4\frac{2}{9}$.

1. Usa la recta numérica para aproximar la raíz cuadrada. Expresa el resultado como un número mixto.

a) 11 es —— de la distancia entre 9 y 16.

Por tanto, $\sqrt{11}$ es aproximadamente —— de la distancia entre 3 y 4.

Así, $\sqrt{11} \approx$ _______.

b) $\sqrt{15}$ c) $\sqrt{10}$ d) $\sqrt{14}$ e) $\sqrt{12}$

2. Completa la recta numérica para aproximar la raíz cuadrada. Expresa el resultado como un número mixto.

a) $\sqrt{5} \approx$ b) $\sqrt{6} \approx$ c) $\sqrt{7} \approx$ d) $\sqrt{8} \approx$

3. Completa la recta numérica para hacer una aproximación de la raíz cuadrada. Expresa el resultado como un número mixto.

a) $\sqrt{26} \approx$ b) $\sqrt{29} \approx$ c) $\sqrt{32} \approx$ d) $\sqrt{35} \approx$

4. Aproxima las raíces a un número mixto. Después, ordena los números del conjunto, de menor a mayor.

a) $\left\{\sqrt{23},\ \sqrt{19},\ 4\frac{5}{9},\ \frac{40}{9}\right\}$ b) $\left\{\sqrt{31},\ 5\frac{35}{99},\ 5\frac{2}{3},\ \sqrt{28}\right\}$

Extra ▶ $\left\{\sqrt{20} - 1,\ 4\frac{1}{2},\ \sqrt{13} + 2,\ \sqrt{30} - 3\right\}$

5. a) Usa la recta numérica para aproximar las raíces cuadradas. Expresa el resultado como un número mixto.

i) $\sqrt{21} \approx 4\frac{5}{9}$ ii) $\sqrt{17} \approx$ iii) $\sqrt{23} \approx$ iv) $\sqrt{19} \approx$

b) Expresa los números mixtos del ejercicio anterior como decimales periódicos.

i) $\sqrt{21} \approx$ ___$4,\widehat{5}$___   ii) $\sqrt{17} \approx$ ______   iii) $\sqrt{23} \approx$ ______   iv) $\sqrt{19} \approx$ ______

c) Redondea los resultados de *b*) a las décimas.

i) $\sqrt{21} \approx$ ___*4,6*___   ii) $\sqrt{17} \approx$ ______   iii) $\sqrt{23} \approx$ ______   iv) $\sqrt{19} \approx$ ______

6. Calcula las potencias. Usa el resultado más próximo a 28 para aproximar $\sqrt{28}$.

$5,1^2 =$ _________ $5,2^2 =$ _________ $5,3^2 =$ _________   Por tanto, $\sqrt{28} \approx$ ______

7. Calcula las potencias. Usa el resultado más próximo a 53 para aproximar $\sqrt[3]{53}$.

$3,9^3 =$ _________ $3,8^3 =$ _________ $3,7^3 =$ _________   Por tanto, $\sqrt[3]{53} \approx$ ______

Para aproximar $\sqrt{45}$ usamos una tabla.

$\sqrt{45}$ está entre 6 y 7, pero más próximo a 7. Probamos con $6,7^2$. ¿La estimación es demasiado alta o demasiado baja?

Probamos con un segundo valor. Si la primera estimación es demasiado baja, probamos con un valor más alto. Si es demasiado alta, probamos con uno más bajo.

Aproximamos $\sqrt{45}$ al número más próximo.

x	x^2	Estimación
6,7	44,89	demasiado baja
6,8	46,24	demasiado alta

$6,7^2$ está más próximo a 45; por tanto, $\sqrt{45} \approx 6,7$.

8. Usa una tabla para aproximar el número irracional a las décimas.

a) $\sqrt{68}$ está entre ___*8*___ y ___*9*___, pero más próximo a ___*8*___.

x	x^2	Estimación
8,2	*67,24*	*demasiado baja*
8,3	*68,89*	*demasiado alta*

Por tanto, $\sqrt{68} \approx$ ___*8,2*___.

b) $\sqrt[3]{101}$ está entre ___*4*___ y ___*5*___, pero más próximo a ___*5*___.

x	x^3	Estimación
4,7		

Por tanto, $\sqrt[3]{101} \approx$ ______.

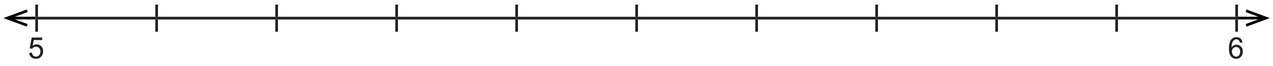
c) $\sqrt{85}$ d) $\sqrt{13}$ e) $\sqrt[3]{240}$ f) $\sqrt[3]{700}$

Extra ▶ Usa una tabla para aproximar $\sqrt{68}$ a las centésimas. Pista: Prueba con $8,23^2$.

9. a) Expresa los siguientes números como decimales, redondeando a las décimas.

i) $5\frac{1}{5} =$ _______ ii) $\sqrt{30} \approx$ _______ iii) $5\frac{2}{3} \approx$ _______ iv) $\sqrt[3]{130} \approx$ _______

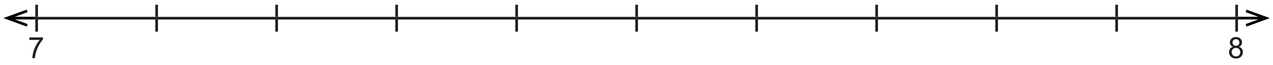
b) Sitúa los números de *a*) en la recta numérica.



c) Ordena los números del ejercicio *a*) de menor a mayor. _______, _______, _______, _______

10. a) Ordena los números del conjunto de menor a mayor: $\left\{\sqrt{51};\ 8;\ \frac{23}{3};\ 7,\overset{\frown}{30}\right\}$

b) Sitúa los números del ejercicio *a*) en la recta numérica.



11. La longitud del lado (l) de un cuadrado de área A se obtiene con la fórmula $l = \sqrt{A}$.

a) Encuentra la longitud del lado de un cuadrado de 130 cm^2 de área redondeando a las décimas.

b) Encuentra el perímetro de un cuadrado de 55 dm^2 de área redondeando a las décimas.

c) ¿Aproximadamente cuánta valla necesitas para rodear un jardín de 5 m^2 de área?

12. La longitud del lado (l) de un cubo con volumen V se obtiene con la fórmula $l = \sqrt[3]{V}$.

a) Encuentra la longitud del lado de un cubo de 485 mm^3 de volumen redondeando a las décimas.

b) Encuentra la longitud del lado de un cubo de 0,2 mm^3 de volumen redondeando a las décimas.

c) Un reposapiés con forma de cubo tiene un volumen de 64.000 cm^3. ¿Cabe debajo de una mesa auxiliar que mide 0,45 m de alto?

13. Resuelve las ecuaciones. Redondea el resultado a las décimas.

a) $x^2 = 67$

$x = \pm\sqrt{67}$

$x \approx \pm 8{,}2$

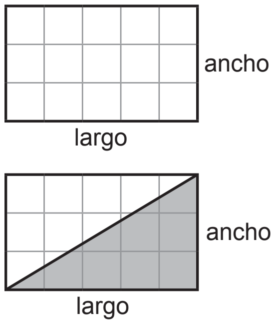
b) $x^3 = 492$

c) $5x^2 - 18 = 87$

Extra ▶ $0{,}3x^3 + 4 = 0{,}2x^3 - 1{,}4$

G8-39 Área de los triángulos y los paralelogramos

RECUERDA:



Área de un rectángulo $=$ largo $\times$ ancho $=$

$= 5 \times 3 =$

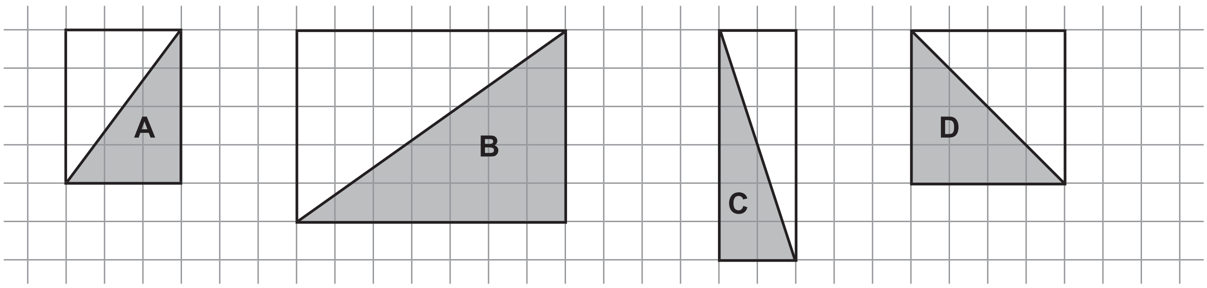
$=$ 15 unidades cuadradas

Área de un triángulo rectángulo $=$ área del rectángulo : 2 $=$

$= 5 \times 3 : 2 =$

$=$ 7,5 unidades cuadradas

1. Encuentra el área de los triángulos rectángulos.



Área de A $=$ ______ $\times$ ______ : 2 $=$

$=$ ______ unidades cuadradas

Área de B $=$ ______ $\times$ ______ : 2 $=$

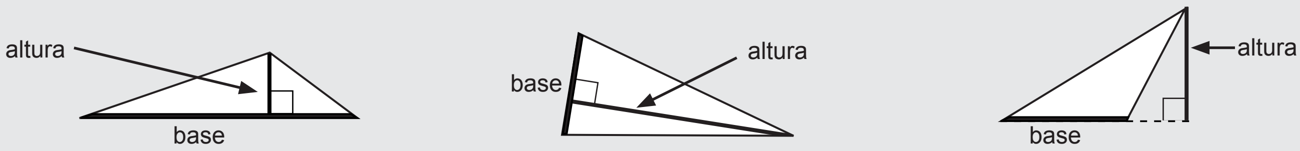
$=$ ______ unidades cuadradas

Área de C $=$ ______ $\times$ ______ : 2 $=$

$=$ ______ unidades cuadradas

Área de D $=$ ______ $\times$ ______ : 2 $=$

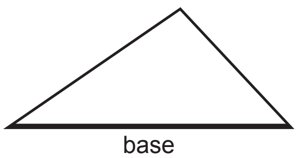
$=$ ______ unidades cuadradas



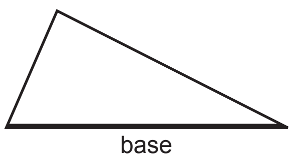
La altura de un triángulo es la longitud de un segmento perpendicular que va desde el vértice hasta la base.

2. Utiliza una regla para trazar la altura de los triángulos.

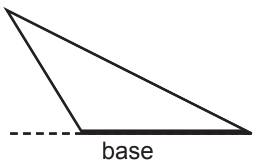
a)



b)

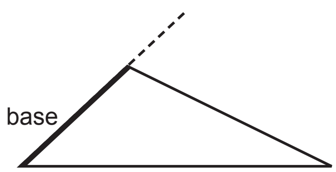


c)

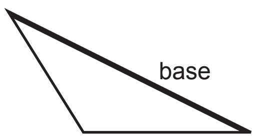


d)

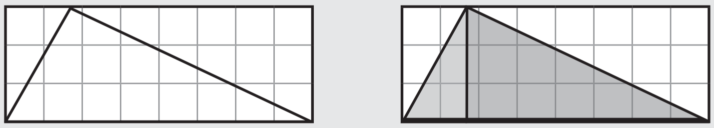
e)



f)

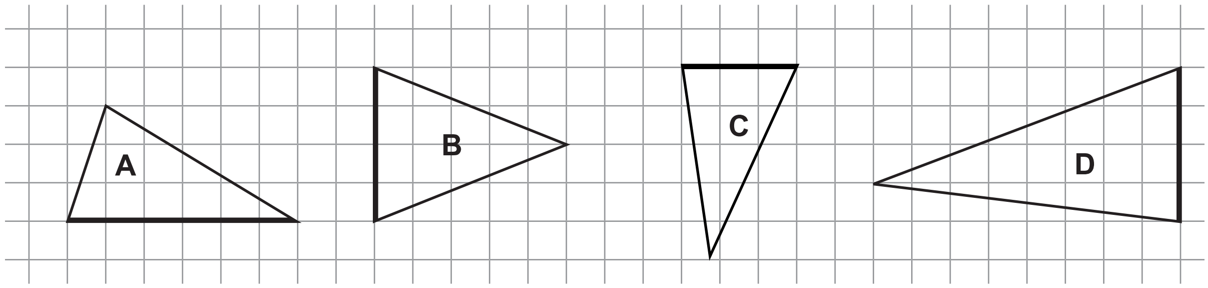


El área de un triángulo agudo es la mitad del área de un rectángulo con la misma base y la misma altura.



Área del triángulo $=$ base $\times$ altura : 2 $=$
$= 8 \times 3 : 2 =$
$=$ 12 unidades cuadradas

3. Cuenta los cuadrados para encontrar la base y la altura. A continuación, utiliza la fórmula para encontrar el área de los triángulos agudos.



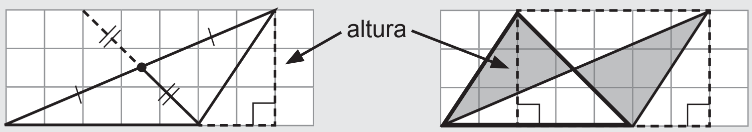
Área de A $=$ ______ $\times$ ______ : 2 $=$
$=$ ______ unidades cuadradas

Área de B $=$ ______ $\times$ ______ : 2 $=$
$=$ ______ unidades cuadradas

Área de C $=$ ______ $\times$ ______ : 2 $=$
$=$ ______ unidades cuadradas

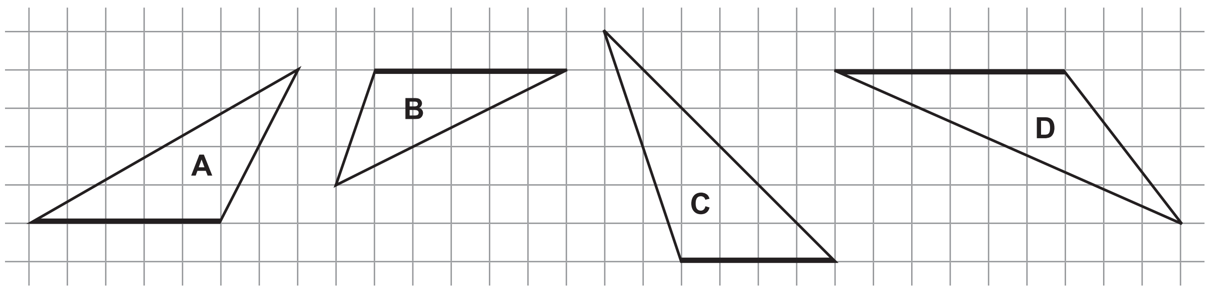
Área de D $=$ ______ $\times$ ______ : 2 $=$
$=$ ______ unidades cuadradas

El área de un triángulo obtuso es la mitad del área de un rectángulo con la misma base y la misma altura.



Área del triángulo $=$ base $\times$ altura : 2 $=$
$= 5 \times 3 : 2 =$
$=$ 7,5 unidades cuadradas

4. Cuenta los cuadrados para encontrar la base y la altura. A continuación, utiliza la fórmula para encontrar el área de los triángulos obtusos.



Área de A $=$ ______ $\times$ ______ : 2 $=$
$=$ ______ unidades cuadradas

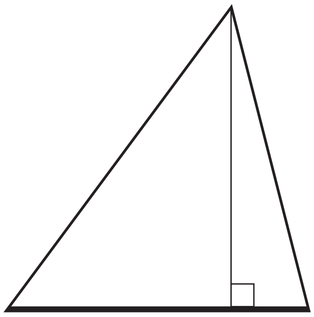
Área de B $=$ ______ $\times$ ______ : 2 $=$
$=$ ______ unidades cuadradas

Área de C $=$ ______ $\times$ ______ : 2 $=$
$=$ ______ unidades cuadradas

Área de D $=$ ______ $\times$ ______ : 2 $=$
$=$ ______ unidades cuadradas

5. Estos triángulos son congruentes. Mide en centímetros la base y la altura de cada triángulo y redondéalas a las décimas. A continuación, encuentra el área.

A.



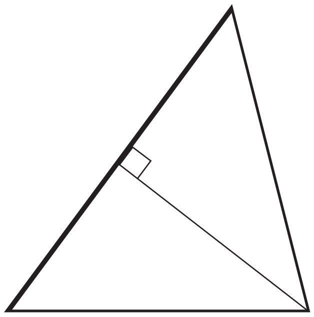
base = ______ cm

altura = ______ cm

Área = ______ × ______ : 2 =

= ______ cm^2

B.



base = ______ cm

altura = ______ cm

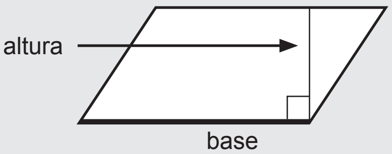
Área = ______ × ______ : 2 =

= ______ cm^2

6. a) ¿Qué observas acerca de los resultados del ejercicio 5?

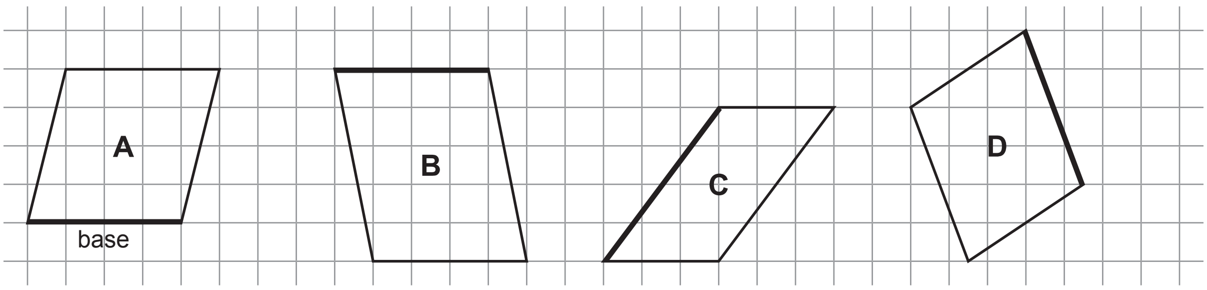
b) ¿Cambia el área si eliges otro lado del triángulo como base?

c) Dibuja un triángulo obtuso y calcula el área utilizando distintos lados como base. El área debe ser la misma. Si no lo es, encuentra el error.

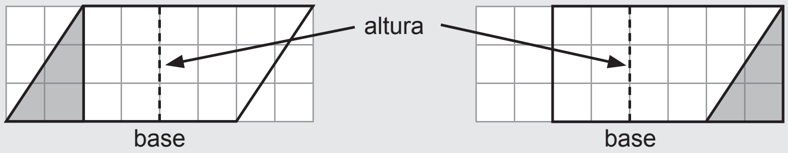


La altura de un paralelogramo es la longitud de un segmento perpendicular que va desde la base hasta el lado opuesto.

7. Traza la altura de los paralelogramos según las bases dadas.



El área de un paralelogramo es igual que el área de un rectángulo con la misma base y la misma altura.



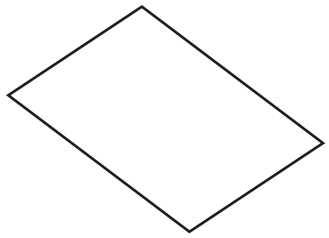
Área del paralelogramo =
= base × altura =
= 6 × 3 =
= 18 unidades cuadradas

8. Indica y mide en centímetros la altura y la base y redondéalas a las décimas.
A continuación, encuentra el área.

a)

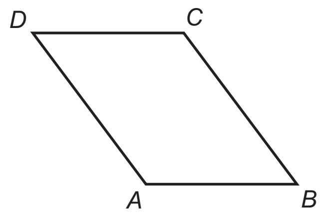
Área = ______ cm × ______ cm =
= ______ cm^2

b)



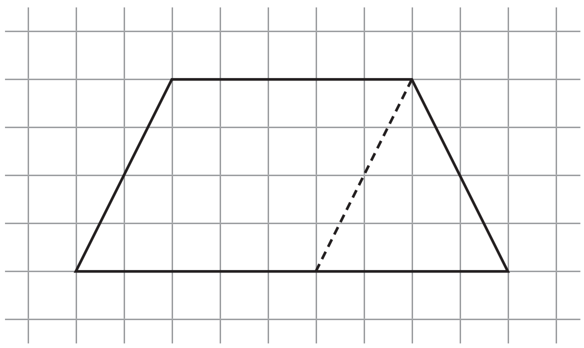
Área = ______ cm × ______ cm =
= ______ cm^2

9. Encuentra el área del paralelogramo *ABCD* de dos maneras distintas.
Primero, utiliza *AB* a modo de base.
A continuación, utiliza *BC* a modo de base.
¿Qué observas al comparar los resultados? ¿Por qué?



10. Encuentra el área de los trapecios. Pista: Suma las áreas del paralelogramo y del triángulo.

a)

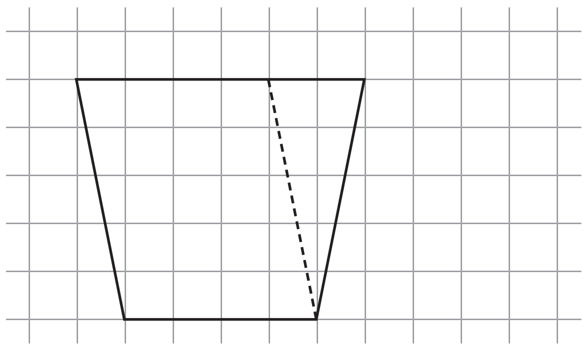


Área del
paralelogramo = ______ · ______ = ______

Área del
triángulo = ______ · ______ : 2 = ______

Área del
trapecio = ______ + ______ = ______ unidades²

b)



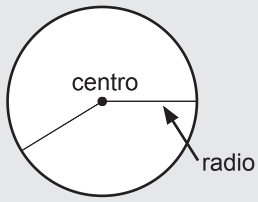
Área del
paralelogramo = ______ · ______ = ______

Área del
triángulo = ______ · ______ : 2 = ______

Área del
trapecio = ______ + ______ = ______ unidades²

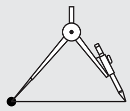
G8-40 Circunferencia del círculo

Todos los puntos de un círculo se encuentran a la misma distancia de otro punto llamado **centro**. Esta distancia se denomina **radio**.

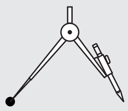


Para dibujar un círculo con un compás cuando conocemos el centro y el radio:

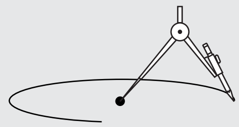
Paso 1: Ajustamos el ancho del compás al radio.



Paso 2: Colocamos el punto del compás en el centro.



Paso 3: Sin cambiar el ancho del compás, dibujamos el círculo.



1. Dibuja un círculo con centro en *O* y radio *AB*.

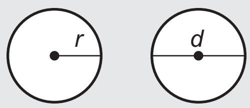
a) 

b) 

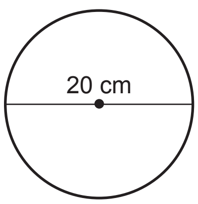
El **diámetro** (*d*) de un círculo es la distancia que une dos de sus puntos pasando por el centro.

El radio (*r*) es la mitad del diámetro (*d*).

$r = d : 2$

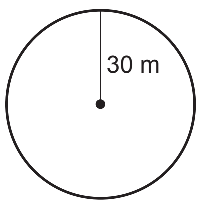


2. Encuentra el radio o el diámetro. Los dibujos no están a escala.

a) 

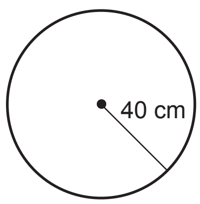
radio = ______

diámetro = ______

b) 

radio = ______

diámetro = ______

c) 

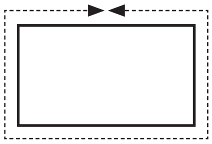
radio = ______

diámetro = ______

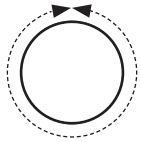
ESP_2ESO-2_LA_XILE_p110-135.indd 114 10/2/20 22:52

RECUERDA:

El contorno de un polígono se denomina **perímetro** (*P*).

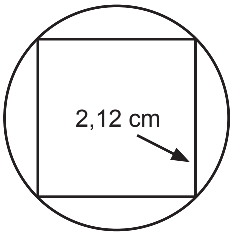


El contorno de un círculo se denomina **circunferencia** (*C*).

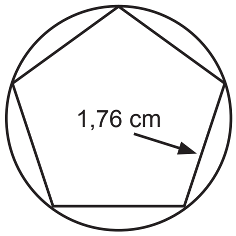


3. Mónica quiere calcular la circunferencia de un círculo. El círculo tiene un diámetro de 3 cm. Mónica dibuja distintos polígonos dentro del círculo. Los lados de cada polígono tienen la misma longitud.

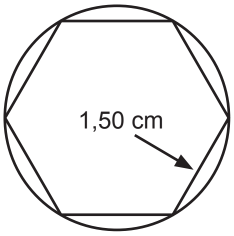
A.



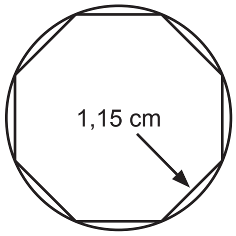
B.



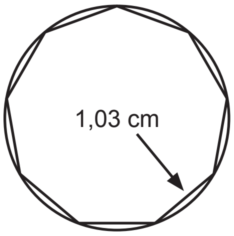
C.



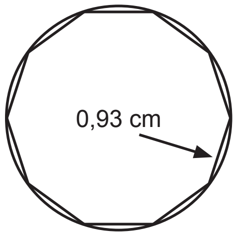
D.



E.



F.



a) Completa el número de lados y calcula el perímetro de los polígonos. Deja la última fila en blanco.

Polígono	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
Longitud de un lado del polígono	*2,12*					
Número de lados	*4*					
Perímetro (*P*)	*8,48*					
P* : *d						

b) En cada uno de los dibujos anteriores, el perímetro del polígono es menor que la circunferencia del círculo. ¿Cómo podemos obtener una aproximación más precisa de la circunferencia a partir del número de lados?

____

c) El diámetro (*d*) del círculo mide 3 cm. Completa la última fila de la tabla calculando *P* : *d* para cada polígono.

La razón entre la circunferencia y el diámetro es la misma para todos los círculos. Este número tiene infinitos decimales. Para identificarlo, usamos la letra griega π (pi).

Redondeado a las centésimas, $\pi \approx 3{,}14$.

La circunferencia de un círculo es π veces mayor que el diámetro.

Circunferencia $= \pi \times$ diámetro $= \pi \times d$. Pero el diámetro es dos veces el radio, por tanto:

Circunferencia $= \pi \times 2 \times$ radio $= 2 \times \pi \times r = 2\pi r$.

4. Para las medidas dadas, encuentra la circunferencia aproximada del círculo (C).
Utiliza 3,14 como valor de π.

a) diámetro $= 5$ cm

$C = \pi \times d$

$C \approx 3{,}14 \times 5 =$

$= 15{,}7$ cm

b) radio $= 2$ mm

$C = 2 \times \pi \times r$

c) diámetro $= 10$ m

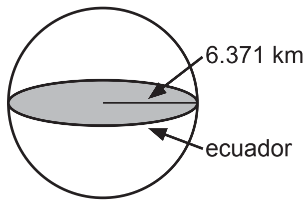
d) radio $= 3$ dm

5. La noria London Eye, en Inglaterra, tiene un diámetro de 120 m.

a) Encuentra la circunferencia aproximada de la noria.

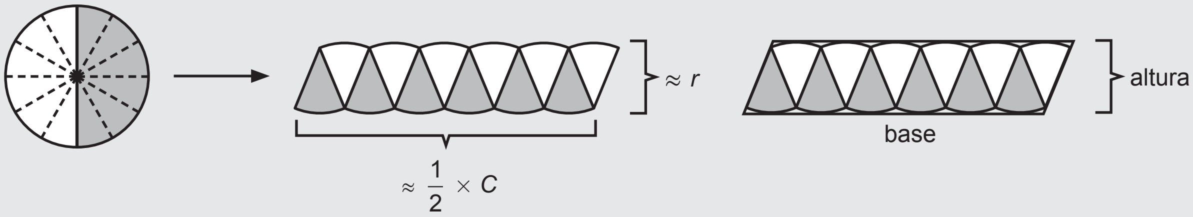
b) La noria tarda unos 30 minutos (1.800 segundos) en dar una vuelta entera.
¿Aproximadamente a qué velocidad se mueve la noria en metros por segundo?

6. El radio de la Tierra, desde el centro hasta la superficie, mide unos 6.371 km. El ecuador de la Tierra forma un círculo. Encuentra la circunferencia aproximada del ecuador.



G8-41 Área del círculo

Se puede obtener el área aproximada de un círculo a partir del área de un paralelogramo.



Área del círculo (A) $\approx$ base $\times$ altura $\approx \frac{1}{2} \times C \times r = \frac{1}{2} \times 2 \times \pi \times r \times r = \pi r^2$ $\quad A = \pi r^2$

1. Encuentra el área aproximada de los círculos con los radios dados. Utiliza 3,14 como valor de π.

a) $r = 5$ cm

$A = \pi r^2$

$A \approx 3{,}14 \times 5 \times 5 =$

$= 78{,}5\ cm^2$

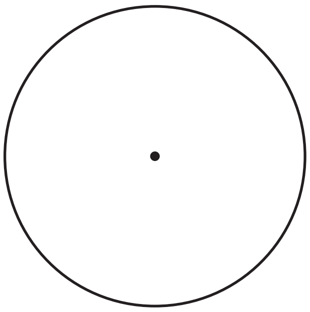
b) $r = 10$ m

c) $r = 8$ dm

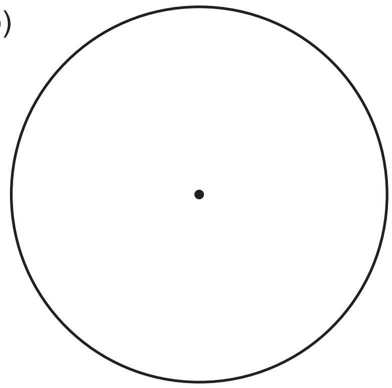
d) $r = 6$ km

2. Mide los radios en cm. A continuación, encuentra el área aproximada. Utiliza $3{,}14 = \pi$.

a)

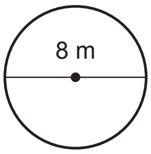


b)



3. Calcula las áreas encontrando primero el radio. Utiliza $3{,}14 = \pi$. Los dibujos no están a escala.

a)



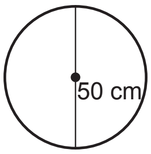
$r =$ 4 m

$A = \pi r^2$

$A \approx 3{,}14 \times 4 \times 4 =$

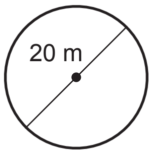
$= 50{,}24\ m^2$

b)



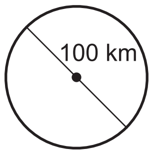
$r =$

c)



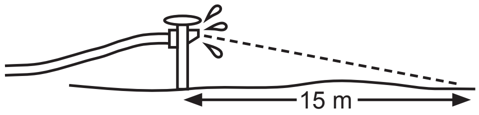
$r =$

d)



$r =$

4. Un aspersor giratorio tiene un alcance de 15 m.
¿Aproximadamente qué área de césped riega el aspersor?



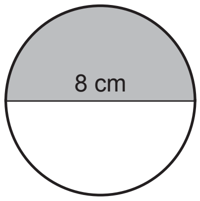
5. En una pizzería, una pizza mediana tiene un diámetro de 30 cm y cuesta $7.000.
Una pizza grande tiene un diámetro de 40 cm y cuesta $9.000.

a) Encuentra el radio y el área de cada pizza.

b) Para cada pizza, encontrar el área aproximada de pizza medida en cm^2 que ofrecen por cada mil pesos.

c) ¿Con qué tamaño de pizza obtienes más cantidad por cada mil pesos?

6. El círculo de la derecha tiene un diámetro de 8 cm. El área sombreada es un semicírculo.



a) Encuentra el radio del círculo. $r =$ ______ : 2 $=$ ______ cm

b) Encuentra la circunferencia del círculo.

$C = \pi \times d \approx 3{,}14 \times$ ______ $=$ ___________ cm

c) Traza una línea alrededor del semicírculo sombreado. ¿Cuál es la longitud de la línea? Pista: Suma el diámetro y la mitad de la circunferencia del círculo.

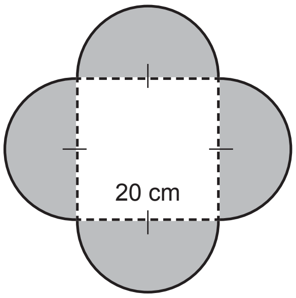
____

d) Encuentra el área del círculo. $A = \pi r^2 \approx 3{,}14 \times$ ______ $\times$ ______ $=$ ___________ cm^2

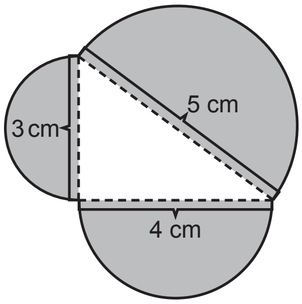
e) El área de un semicírculo es la mitad del área de un círculo. Encuentra el área del semicírculo.

Área del semicírculo $=$ ___________ : 2 $=$ ___________ cm^2

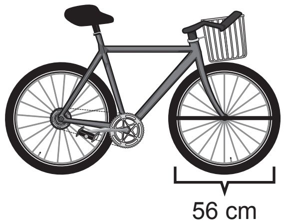
7. a) Encuentra el área total de la figura.



b) Traza una línea alrededor de la parte exterior de la figura. ¿Cuál es la longitud de la línea?



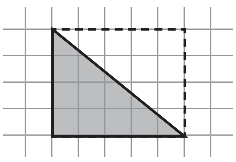
8. a) Cada rueda de Sameer tiene un diámetro de 56 cm.
¿Cuál es la circunferencia de cada rueda?



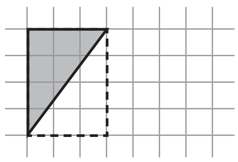
b) Sameer pedalea de manera que las ruedas dan 3 vueltas enteras en 2 segundos.
¿Qué distancia recorre Sameer en 1 segundo? ¿Y en 2 segundos?
¿Y en 10 segundos? ¿Y en 1 minuto? ¿Y en 1 hora?

G8-42 Introducción al teorema de Pitágoras

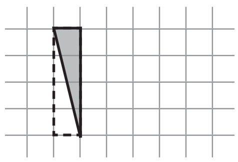
1. Encuentra el área de los triángulos rectángulos.

a) 

Área = __*20*__ : 2 = __*10*__

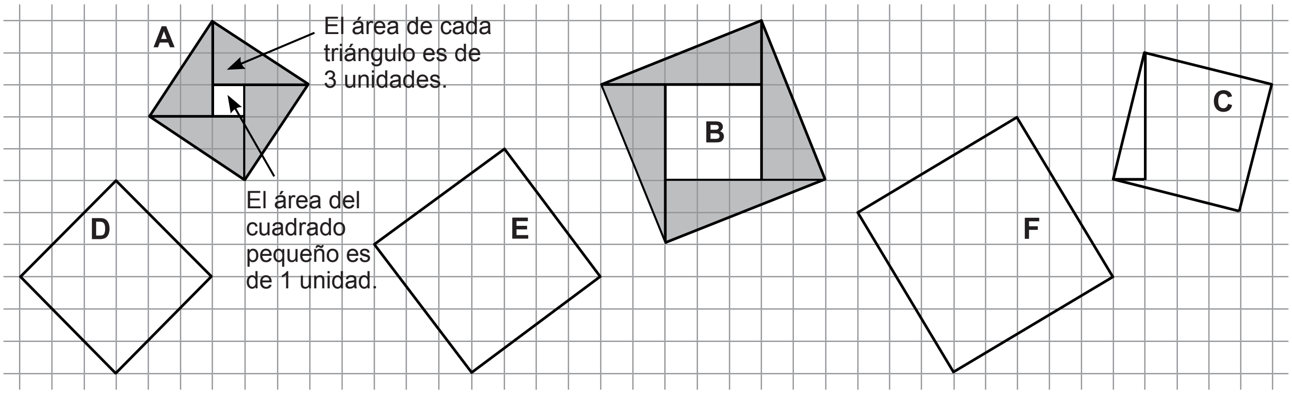
b) 

Área = ______ : 2 = ______

c) 

Área = ______ : 2 = ______

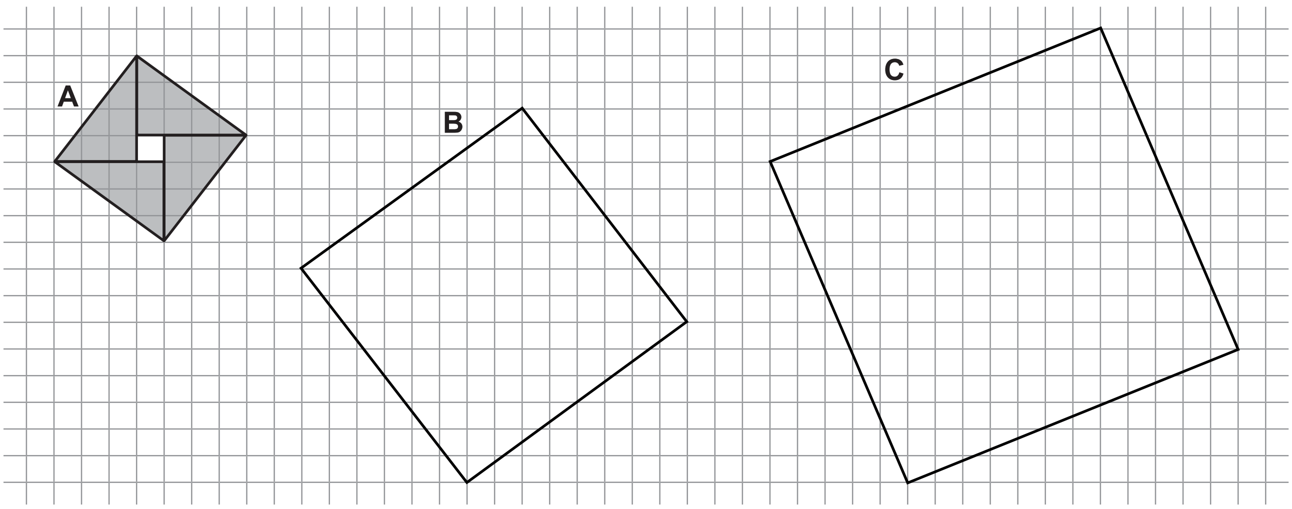
2. Calcula el área de cada cuadrado a partir del área de los 4 triángulos rectángulos y de la figura que queda.



Área de A $= 4 \times$ __*3*__ + __*1*__ = __*13*__

3. ¿Qué longitud tienen los lados del cuadrado E del ejercicio 2? ¿Por qué?

4. Encuentra la longitud de los lados de cada cuadrado.



Longitud de los lados de A =

$= \sqrt{4 \times 6 + 1} =$

$= \sqrt{25} = 5$

Longitud de los lados de B =

$= \sqrt{4 \times \_\_\_\_ + \_\_\_\_} =$

$= \sqrt{\_\_\_\_} = \_\_\_\_$

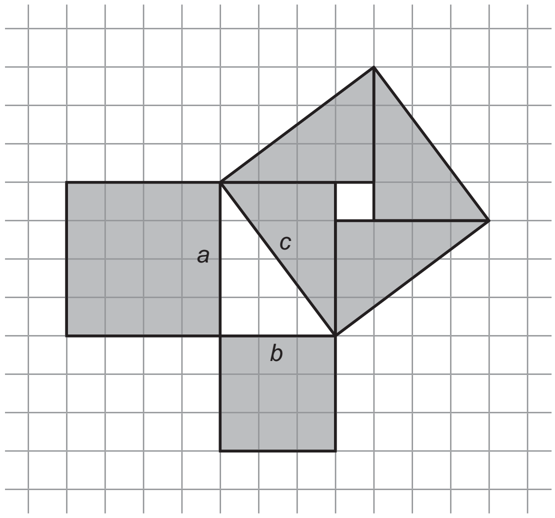
Longitud de los lados de C =

$= \sqrt{4 \times \_\_\_\_ + \_\_\_\_} =$

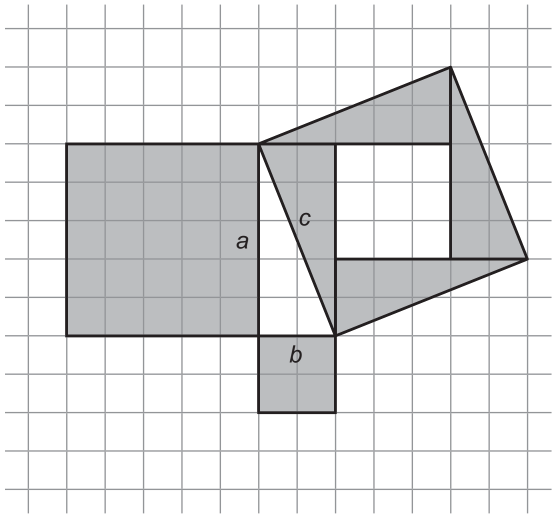
$= \sqrt{\_\_\_\_} = \_\_\_\_$

5. a) Encuentra el área de los cuadrados cuyos lados miden a, b y c.
Escribe los resultados en la tabla. Deja la última columna en blanco.

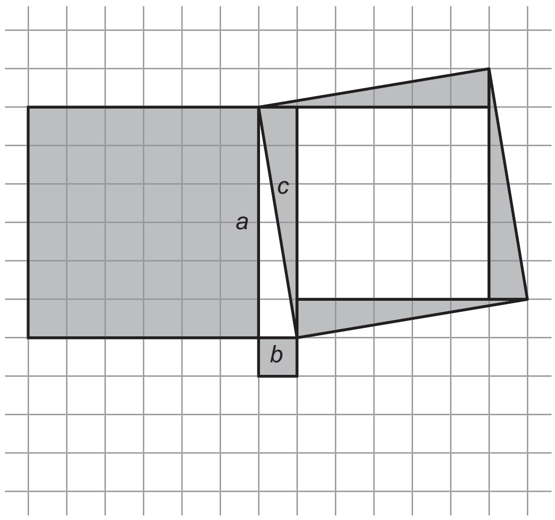
i)



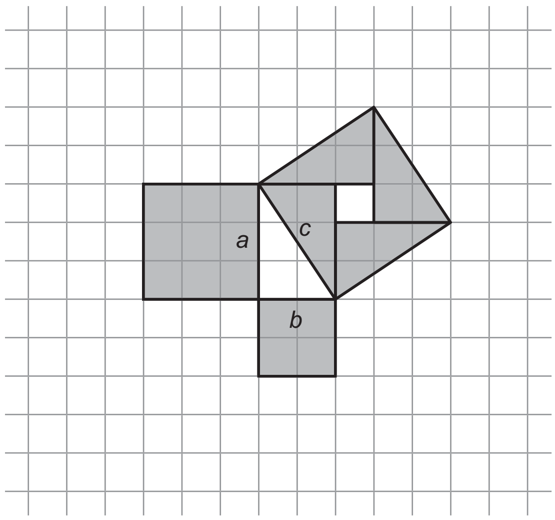
ii)



iii)



iv)



	a^2	b^2	c^2	$a^2 + b^2$
i)	$4 \times 4 = 16$	$3 \times 3 = 9$	$4 \times 6 + 1 = 25$	
ii)				
iii)				
iv)				

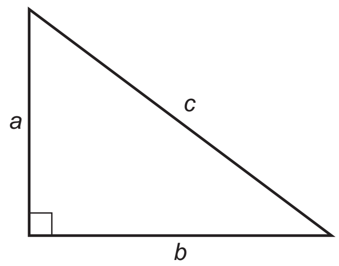
b) Calcula el valor de $a^2 + b^2$ para cada fila de la tabla. Completa la última columna.

c) Compara los resultados de las dos últimas columnas: c^2 y $a^2 + b^2$. Haz una conjetura: si c es el lado opuesto al ángulo recto de un triángulo rectángulo de lados a, b y c,

entonces ____.

6. Comprueba la conjetura del ejercicio *5 c*) midiendo en centímetros la longitud de cada lado del triángulo rectángulo. Redondea el resultado a las décimas.

a)

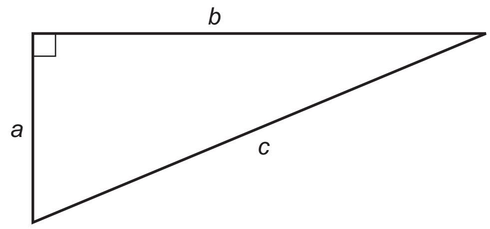


$a =$ ______ $b =$ ______ $c =$ ______

$a^2 =$ ______ $b^2 =$ ______ $c^2 =$ ______

$a^2 + b^2 =$ ____________

b)



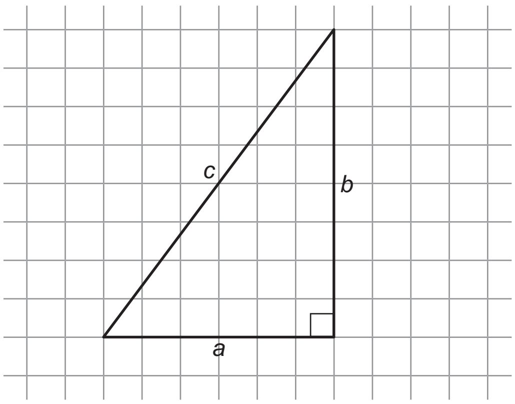
$a =$ ______ $b =$ ______ $c =$ ______

$a^2 =$ ______ $b^2 =$ ______ $c^2 =$ ______

$a^2 + b^2 =$ ____________

7. Utiliza $c^2 = a^2 + b^2$ para encontrar la longitud de c.

a)



$c^2 = \quad a^2 \quad + \quad b^2 =$

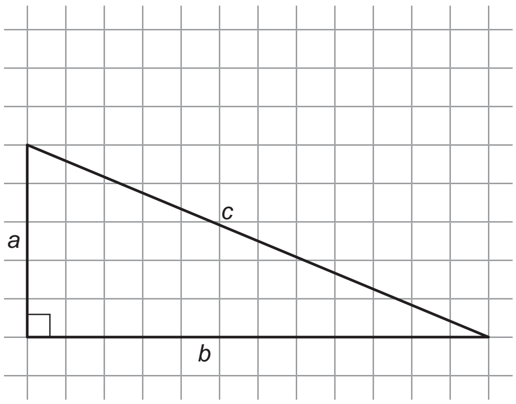
$= \_\_\_\_\_\_^2 + \_\_\_\_\_\_^2 =$

$= \_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_ =$

$= \_\_\_\_\_\_$

$c = \sqrt{\_\_\_\_\_\_} = \_\_\_\_\_\_$

b)



$c^2 = \quad a^2 \quad + \quad b^2 =$

$= \_\_\_\_\_\_^2 + \_\_\_\_\_\_^2 =$

$= \_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_ =$

$= \_\_\_\_\_\_$

$c = \sqrt{\_\_\_\_\_\_} = \_\_\_\_\_\_$

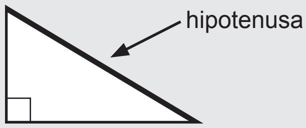
8. Estos son los lados que forman el ángulo recto de un triángulo rectángulo. Encuentra la longitud del lado opuesto al ángulo recto.

a) 8, 15

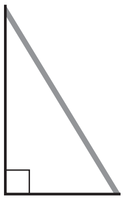
b) 9, 12

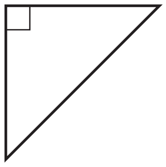
G8-43 Teorema de Pitágoras

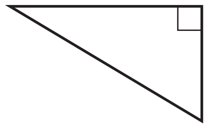
En un triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto se denomina **hipotenusa**.

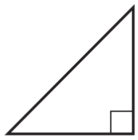


1. Marca la hipotenusa de los triángulos con una línea gruesa.

a) 

b) 

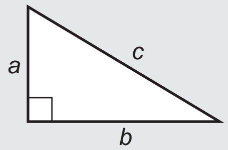
c) 

d) 

El teorema de Pitágoras

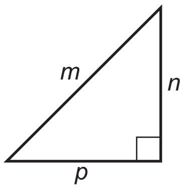
En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

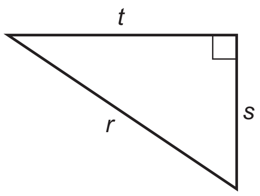
Si la hipotenusa es c y los otros dos lados son a y b, entonces $c^2 = a^2 + b^2$.

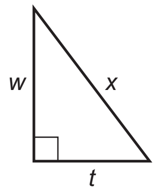


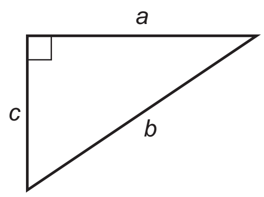
$c^2 = a^2 + b^2$

2. Utiliza el teorema de Pitágoras para plantear las ecuaciones que resuelvan los triángulos.

a) 

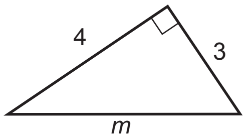
b) 

c) 

d) 

______ ______ ______ ______

3. Utiliza el teorema de Pitágoras para encontrar las hipotenusas.

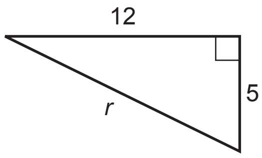
a) 

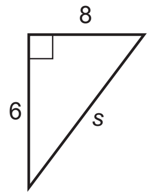
$m^2 = 4^2 + 3^2$

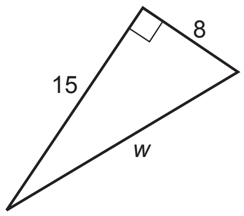
$m^2 = 16 + 9$

$m^2 = 25$

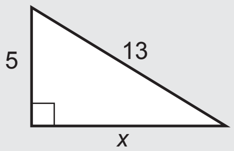
$m = \sqrt{25} = 5$

b) 

c) 

d) 

El teorema de Pitágoras se puede utilizar para encontrar cualquier lado de un triángulo rectángulo si conocemos los otros dos lados.



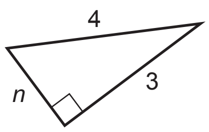
$5^2 + x^2 = 13^2$

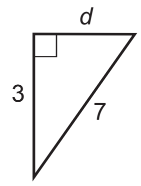
$25 + x^2 = 169$

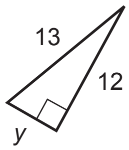
$x^2 = 169 - 25 = 144$

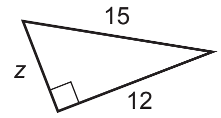
Por tanto, $x = \sqrt{144} = 12$

4. Utiliza el teorema de Pitágoras para plantear las ecuaciones que resuelvan los triángulos. A continuación, encuentra los lados que faltan.

a) 

b) 

c) 

d) 

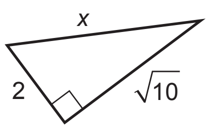
$n^2 + 3^2 = 4^2$

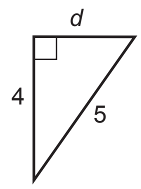
$n^2 + 9 = 16$

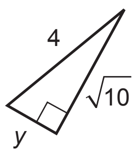
$n^2 = 16 - 9 = 7$

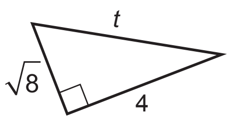
$n = \sqrt{7}$

5. Encuentra los lados que faltan de los triángulos utilizando el teorema de Pitágoras.

a) 

b) 

c) 

d) 

$2^2 + \left(\sqrt{10}\right)^2 = x^2$

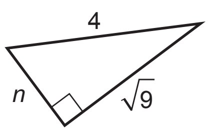
$4 + 10 = x^2$

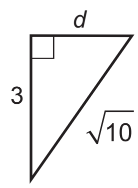
$14 = x^2$

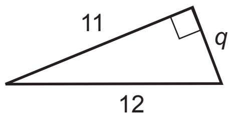
$x = \sqrt{14}$

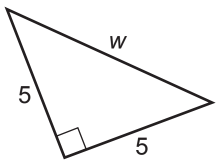
$x \approx 3{,}7$

6. Encuentra los lados que faltan de los triángulos.

a) 

b) 

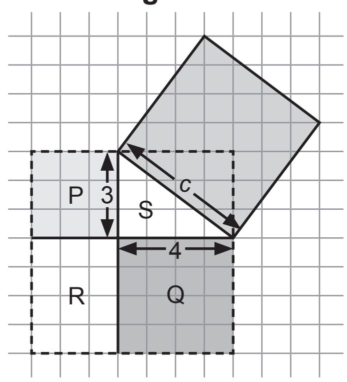
c) 

d) 

G8-44 Demostración del teorema de Pitágoras

1. Observa la figura 1.

Figura 1



a) ¿Cuál es el ancho del cuadrado P? ______

b) ¿Cuál es el ancho del cuadrado Q? ______

c) ¿Tienen la misma área los rectángulos R y S? ___________

¿Cómo lo sabes? ______________________

d) Completa los espacios en blanco con una expresión para cada área.

Área del cuadrado P: $\_\_\_\_\_\_^2$ Área del cuadrado Q: $\_\_\_\_\_\_^2$

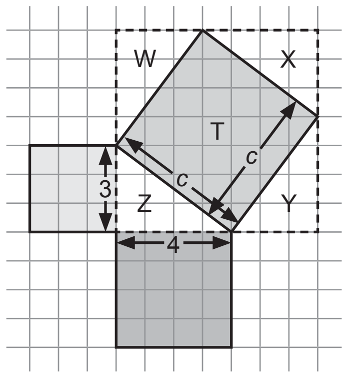
Área del rectángulo R: ______ $\times$ ______

Área del rectángulo S: ______ $\times$ ______

Área del cuadrado con el contorno discontinuo: _____________________________

2. Observa la figura 2.

Figura 2



a) Los triángulos Z y X forman un rectángulo.
¿Cuál es su área? ______ $\times$ ______

b) Los triángulos W e Y forman un rectángulo.
¿Cuál es su área? ______ $\times$ ______

c) Escribe una expresión para el largo y el ancho del cuadrado T. ______

d) Escribe una expresión para el área del cuadrado T. $\_\_\_\_\_\_^2$

e) Utiliza las respuestas de los ejercicios *a*), *b*) y *d*) para escribir una expresión para el área del cuadrado con el contorno discontinuo.

____

3. a) Cuenta los cuadrados en la figura 1 para encontrar el ancho y el largo del cuadrado con el contorno discontinuo. ancho = ______ largo = ______

b) Cuenta los cuadrados en la figura 2 para encontrar el ancho y el largo del cuadrado con el contorno discontinuo. ancho = ______ largo = ______

c) ¿Qué puedes decir acerca de las áreas de los cuadrados con el contorno discontinuo de la figura 1 y de la figura 2? ____

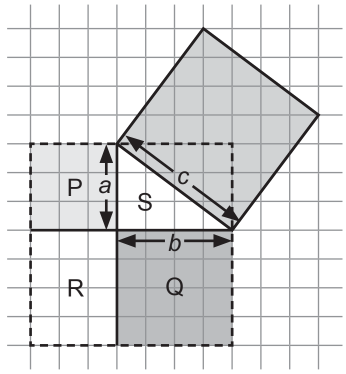
d) Plantea una ecuación a partir de las respuestas del ejercicio *2 e*) y *1 d*)

____

e) Elimina los términos que son iguales en ambos lados de la ecuación anterior, y exprésala en función de c^2. ____________________________

4. Observa la figura 3.

Figura 3



a) Escribe una expresión para el ancho del cuadrado P. ______

b) Escribe una expresión para el ancho del cuadrado Q. ______

c) ¿Tienen la misma área los rectángulos R y S? _________

¿Cómo lo sabes? ___________________________

d) Completa los espacios en blanco con una expresión para cada área.

Área del cuadrado P: $\_\_\_\_\_\_^2$ Área del cuadrado Q: $\_\_\_\_\_\_^2$

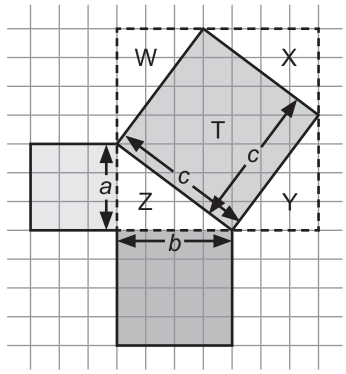
Área del rectángulo R: ______ $\times$ ______

Área del rectángulo S: ______ $\times$ ______

Área del cuadrado con el contorno discontinuo: _____________________________

5. Observa la figura 4.

Figura 4



a) Los triángulos Z y X forman un rectángulo. Escribe una expresión para el área del rectángulo. ______ $\times$ ______

b) Los triángulos Y y W forman un rectángulo. Escribe una expresión para el área del rectángulo. ______ $\times$ ______

c) Escribe una expresión para el largo y el ancho del cuadrado T. ______

d) Escribe una expresión para el área del cuadrado T. $\_\_\_\_\_\_^2$

e) Utiliza las respuestas de los ejercicios *a*), *b*) y *d*) para escribir una expresión para el área del cuadrado con el contorno discontinuo.

____

6. a) Observa la figura 3 y escribe una expresión para el ancho y el largo del cuadrado con el contorno discontinuo. ancho = _______ largo = _______

b) Observa la figura 4 y escribe una expresión para el ancho y el largo del cuadrado con el contorno discontinuo. ancho = _______ largo = _______

c) ¿Qué puedes decir acerca de las áreas de los cuadrados con el contorno discontinuo de la figura 3 y de la figura 4? ____

d) Plantea una ecuación a partir de las respuestas del ejercicio *5 e*) y *4 d*).

____

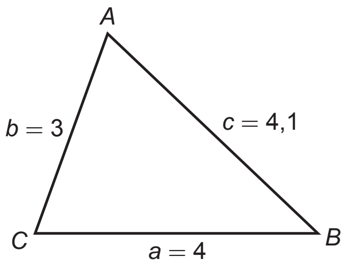
e) Elimina los términos que son iguales en ambos lados de la ecuación anterior, y exprésala en función de c^2. _______________________

G8-45 Recíproco del teorema de Pitágoras

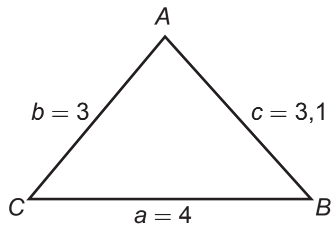
RECUERDA: Un ángulo agudo mide menos de 90°.
Un ángulo obtuso mide más de 90°.
Un ángulo recto mide exactamente 90°.

1. Completa la tabla. Utiliza $<$, $>$ o $=$ para comparar c^2 con $a^2 + b^2$.

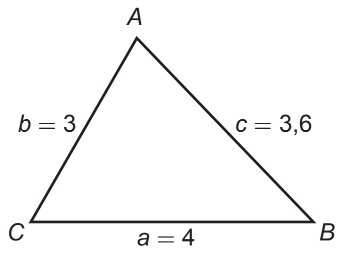
a) i)



ii)

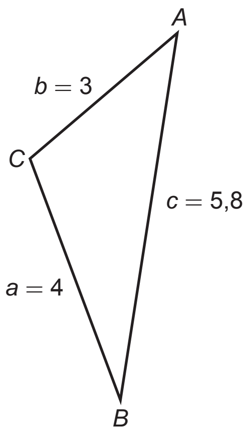


iii)

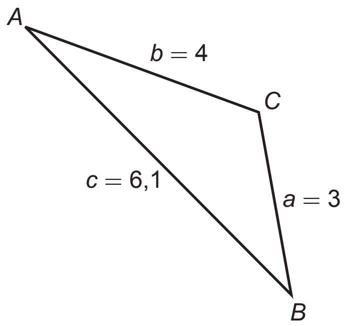


	a	**b**	**c**	a^2	b^2	c^2	$a^2 + b^2$	c^2 ☐ $a^2 + b^2$	**¿Es ∠C un ángulo agudo, recto u obtuso?**
i)	*4*	*3*	*4,1*	*16*	*9*	*16,81*	*25*	$c^2 < a^2 + b^2$	*agudo*
ii)									
iii)									

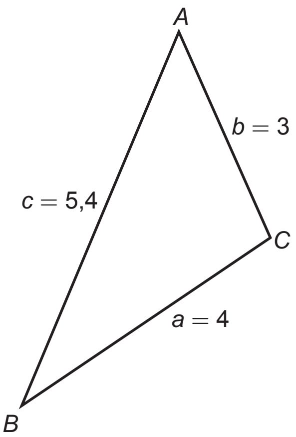
b) i)



ii)

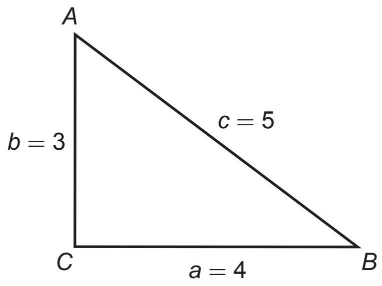


iii)

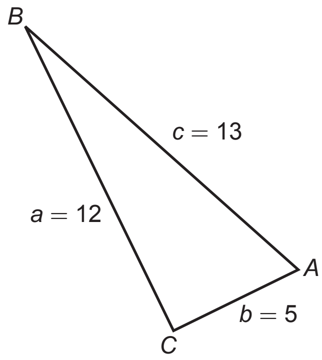


	a	**b**	**c**	a^2	b^2	c^2	$a^2 + b^2$	c^2 ☐ $a^2 + b^2$	**¿Es ∠C un ángulo agudo, recto u obtuso?**
i)									
ii)									
iii)									

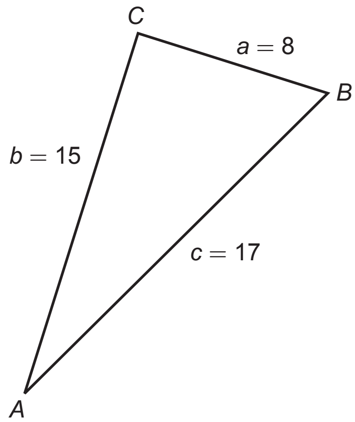
c) i)



ii)



iii)



	a	**b**	**c**	**a^2**	**b^2**	**c^2**	**$a^2 + b^2$**	**c^2 $\square$ $a^2 + b^2$**	**¿Es $\angle C$ un ángulo agudo, recto u obtuso?**
i)									
ii)									
iii)									

2. Resume las conclusiones que has extraído del ejercicio 1.

a) Si $c^2 < a^2 + b^2$, $\angle C$ es un ángulo ______________________.

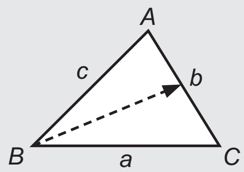
b) Si $c^2 > a^2 + b^2$, $\angle C$ es un ángulo ______________________.

c) Si $c^2 = a^2 + b^2$, $\angle C$ es un ángulo ______________________.

Para nombrar los vértices y los lados de un triángulo:

Paso 1: Identificamos cada vértice con una letra mayúscula.

Paso 2: Identificamos los lados con letras minúsculas. Para cada lado, utilizamos la misma letra que para el vértice opuesto. Por ejemplo, el lado b es opuesto al $\angle B$.

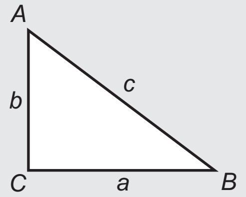


3. Calcula a^2, b^2, c^2 y $a^2 + b^2$. Compara c^2 con $a^2 + b^2$. Deduce si $\angle C$ es un ángulo agudo, obtuso o recto.

	Lados de los triángulos	**a^2**	**b^2**	**c^2**	**$a^2 + b^2$**	**c^2 $\square$ $a^2 + b^2$**	**$\angle C$**
a)	$a = 5$; $b = 9$; $c = 10$	*25*	*81*	*100*	*106*	$c^2 < a^2 + b^2$	*agudo*
b)	$a = 6$; $b = 8$; $c = 10$						
c)	$a = 2{,}5$; $b = 6$; $c = 7$						
d)	$a = 2$; $b = 3{,}75$; $c = 4$						

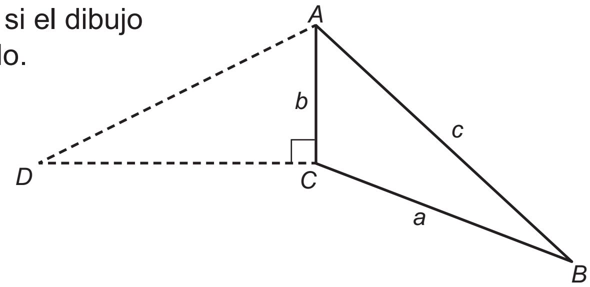
Recíproco del teorema de Pitágoras

En $\triangle ABC$, si $c^2 = a^2 + b^2$, entonces $\angle C$ es un ángulo recto y $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo.



Si $c^2 = a^2 + b^2$, entonces $\angle C = 90°$.

4. Juan no cree que el recíproco del teorema de Pitágoras sea cierto. Juan dibuja $\triangle ABC$ de modo que $c^2 = a^2 + b^2$, pero no dibuja $\angle C$ como un ángulo recto. Sigue estos pasos para comprobar si el dibujo de Juan (el que aparece con líneas continuas) tiene sentido.



a) La recta CD es en perpendicular a AC, de modo que $CD = BC$. Como $BC = a$, indica que $DC = a$.

b) Los puntos D y A se unen para formar $\triangle ADC$. Identifica la longitud de AD con la letra y.

c) ¿Cuánto mide $\angle ACD$? ______

d) ¿Qué tipo de triángulo es $\triangle ADC$? ______________________

e) $\triangle ADC$ es un triángulo rectángulo. Utiliza el teorema de Pitágoras para plantear una ecuación y resolver y^2.

$y^2 =$ ____________________________

f) Ahora tenemos $c^2 = a^2 + b^2$ e $y^2 = a^2 + b^2$. ¿Qué podemos decir acerca de c^2 e y^2?

____

g) Si $c^2 = y^2$, ¿qué podemos decir sobre c e y? _______________________________

h) En $\triangle ADC$ y $\triangle ABC$, dibujamos $CD = CB$, ambos triángulos comparten el lado AC, y ahora tenemos $AD = AB$. ¿Qué criterio de congruencia permite decir que $\triangle ADC \cong \triangle ABC$?

____

i) En $\triangle ADC \cong \triangle ABC$, los lados y los ángulos correspondientes son iguales. ¿Qué ángulo de $\triangle ABC$ es igual a $\angle ACD$? _________________

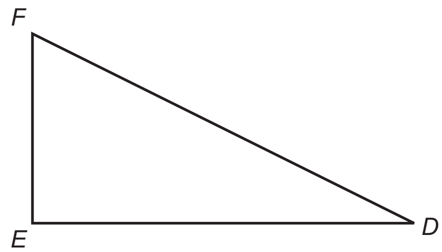
j) Pero $\angle ACD = 90°$. Por tanto, ¿cuánto mide $\angle ACB$? _________________

k) Como $\angle ACB = 90°$, $\triangle ABC$ es un triángulo _________________.

5. En $\triangle DEF$, $d = 7$, $e = 25$ y $f = 24$.

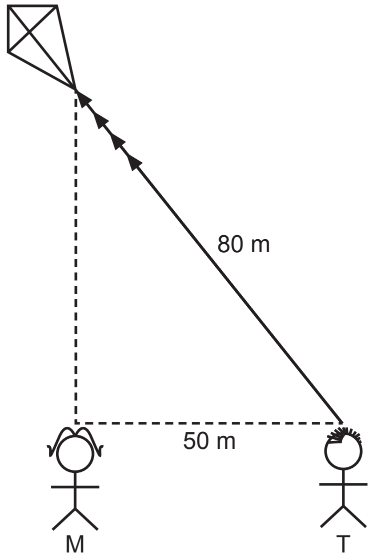
a) Identifica cada lado con la letra correcta: d, e o f.

b) ¿Es $\triangle DEF$ un triángulo rectángulo? Justifica tu respuesta.

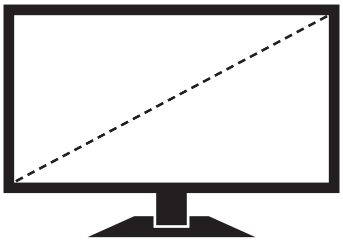


G8-46 Problemas del teorema de Pitágoras

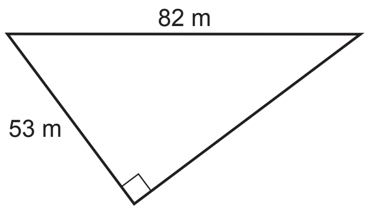
1. Tomás suelta 80 m de cuerda para hacer volar su cometa. Cuando se encuentra a 50 m de María, la cometa está justo encima de María.
¿A qué distancia por encima de María está la cometa?



2. Eva quiere comprar un televisor nuevo. Tiene espacio para un televisor que mida 43,6 in de ancho y 24,5 in de alto. Los televisores se venden especificando solo una medida: la longitud de la diagonal que va desde una esquina del televisor hasta la esquina opuesta.
¿Cuál es el televisor más grande que puede comprar Eva?



3. Samuel tiene que comprar una valla para cercar un campo con forma de triángulo rectángulo, tal y como se muestra en el dibujo de la derecha. Calcula los metros de la valla que necesita, redondeando el resultado a las unidades.

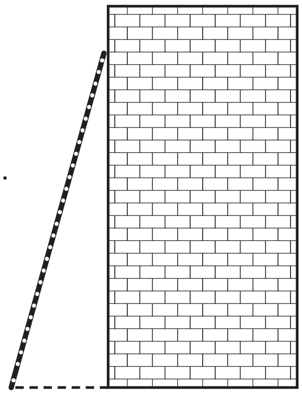


4. Miguel utiliza una escalera que alcanza una altura de 12 metros en una pared. Por motivos de seguridad, debe colocar la base de la escalera a 1 metro de la pared por cada 3 metros de altura.

a) Indica los 12 metros de alto en la pared del dibujo. El dibujo no está a escala.

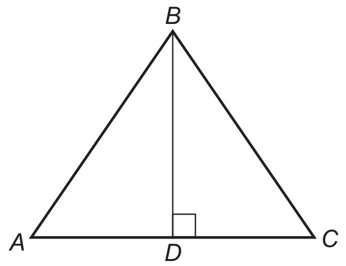
b) ¿A qué distancia de la pared debe estar la base de la escalera? Indica la distancia en el dibujo.

c) Calcula la longitud en metros de la escalera, redondeando el resultado a las unidades. Indícala en el dibujo.



5. Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 8 cm y su base, 10 cm.

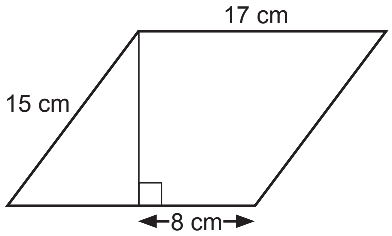
a) Encuentra la longitud de *AD*.



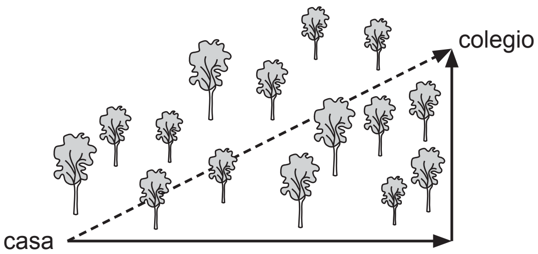
b) Calcula en centímetros la altura del triángulo y redondea el resultado a las décimas.

c) Encuentra el área aproximada del triángulo.

6. Encuentra la altura del paralelogramo de la derecha.



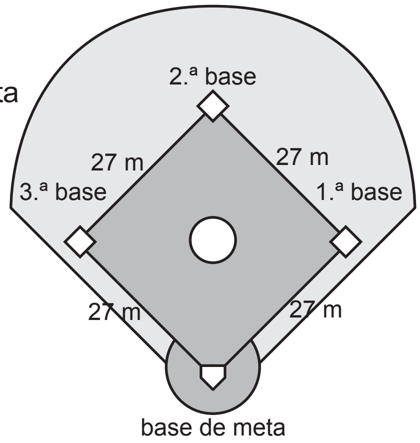
7. Marta suele ir caminando al colegio. Para llegar, camina 2 km hacia el este y, a continuación, 1 km hacia el norte. El lunes, Marta tomó un atajo y atravesó un parque en diagonal. ¿Cuánto más corto es su trayecto cuando toma el atajo? Redondea la distancia al metro más cercano.



8. La distancia entre las bases de un campo de béisbol es de 27 metros.

a) Si el receptor se encuentra en la base de meta y quiere lanzar la pelota hasta la segunda base, ¿a qué distancia en metros debe lanzar la pelota? Redondea el resultado a las décimas.

b) El lanzador lanza la pelota desde un punto que se encuentra a 18,5 metros de la base de meta, en línea recta entre la base de meta y la segunda base. ¿Se encuentra más cerca de la base de meta o de la segunda base? Justifica tu respuesta.



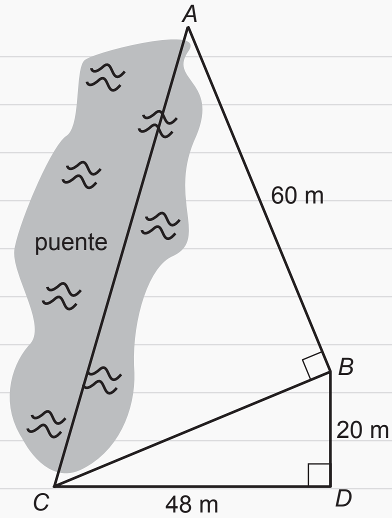
G8-47 Más problemas del teorema de Pitágoras

Resuelve todos los problemas en tu cuaderno.

1. Es necesario construir un puente que atraviese un pantano. Medir la distancia a lo ancho del pantano resulta difícil. En su lugar, se realizan tres mediciones alrededor del pantano. Calcula la longitud del puente redondeada a las unidades, siguiendo estos pasos:

a) En ΔBCD, encuentra la longitud de BC.

b) En ΔACB, encuentra la longitud de AC.

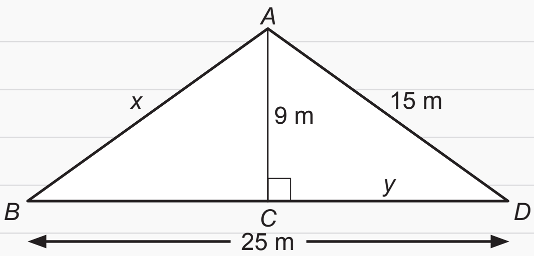


2. Encuentra la longitud del lado x y redondéala a las décimas. Para hacerlo, sigue estos pasos:

a) En ΔACD, encuentra el valor de y.

b) Encuentra la longitud de BC.

c) En ΔABC, encuentra el valor de x.

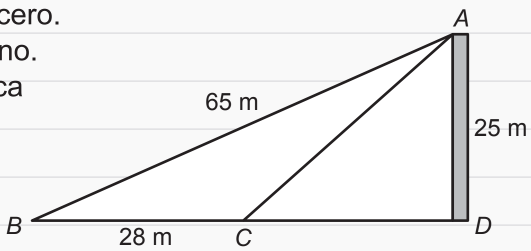


3. Una torre de 25 m está apuntalada por cables de acero. Los cables más largos miden 65 m de largo cada uno. Los cables más cortos están sujetos 28 m más cerca de la base. Encuentra la longitud de un cable corto y redondéala a las décimas. Para hacerlo, sigue estos pasos:

a) En ΔABD, encuentra la longitud de BD.

b) Encuentra la longitud de CD.

c) En ΔACD, encuentra la longitud de AC.

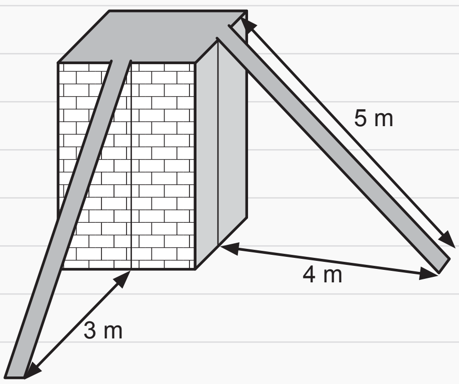


4. La torre de un parque infantil tiene dos toboganes. Uno de ellos mide 5 m de largo y su base se encuentra a 4 m de la base de la torre. La base del segundo tobogán se encuentra a 3 m de la base de la torre.

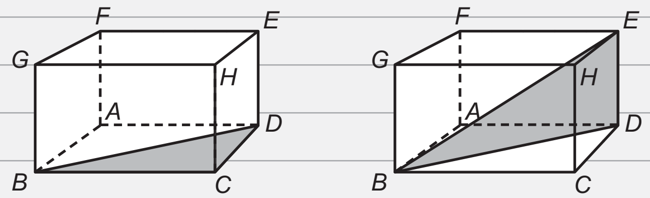
a) ¿A qué distancia del suelo se encuentra el extremo superior del primer tobogán?

b) ¿A qué distancia del suelo se encuentra el extremo superior del segundo tobogán? Justifica tu respuesta.

c) ¿Cuál es la longitud en metros del segundo tobogán? Redondea el resultado a las décimas.



5. A continuación se muestra el mismo prisma rectangular dos veces:



a) *BD* es una diagonal de la base del prisma. ¿Qué tipo de triángulo es ΔBCD?

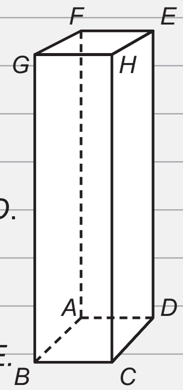
b) *BE* es una diagonal que va desde la base del prisma hasta la esquina opuesta en diagonal. ¿Qué tipo de triángulo es ΔBDE?

c) ¿Qué lado comparten ΔBCD y ΔBDE?

d) Dibuja una copia del prisma y traza ΔABC y ΔACF.

e) ¿Qué tipo de triángulo son ΔABC y ΔACF?

f) ¿Qué lado comparten ΔABC y ΔACF?



6. El prisma rectangular de la derecha mide 3 cm de ancho, 4 cm de largo y 12 cm de alto.

a) Traza la diagonal que va de *B* a *D*. ¿Qué tipo de triángulo es ΔBCD?

b) Utiliza el teorema de Pitágoras y ΔBCD para encontrar la longitud de *BD*.

c) Traza la diagonal que va de *B* a *E*. ¿Qué tipo de triángulo es ΔBDE?

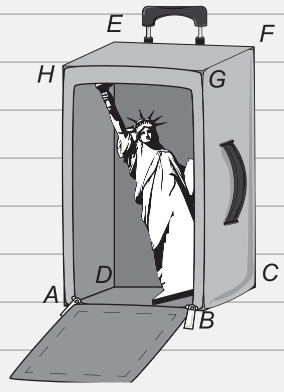
d) ¿Qué lado comparten los dos triángulos?

e) Utiliza el teorema de Pitágoras y ΔBDE para encontrar la longitud de *BE*.

7. Una nave mide 12 metros de ancho, 16 metros de largo y 8 metros de alto. Una araña teje una red que tiene un hilo que va desde una de las esquinas superiores de la nave hasta la esquina inferior opuesta.

a) Dibuja un diagrama de la nave.

b) Encuentra la longitud del hilo que ha tejido la araña.



8. La maleta de Alberto mide 60 cm de largo, 20 cm de ancho y 80 cm de alto. Alberto quiere guardar en la maleta el *souvenir* de la Estatua de la Libertad más alto posible.

a) Traza una diagonal desde *A* hasta *C*. ¿Qué figura es ΔABC?

b) Traza una diagonal desde *A* hasta *F*. ¿Qué figura es ΔACF?

c) ¿Qué lado comparten los dos triángulos?

d) Utiliza ΔABC para encontrar la longitud de *AC*. Redondea el resultado a las décimas.

e) Utiliza ΔACF para encontrar la longitud de *AF*. Redondea el resultado a las décimas.

f) ¿Cuál es el *souvenir* más alto que Alberto puede guardar en la maleta?

G8-48 El teorema de Pitágoras en un sistema de coordenadas

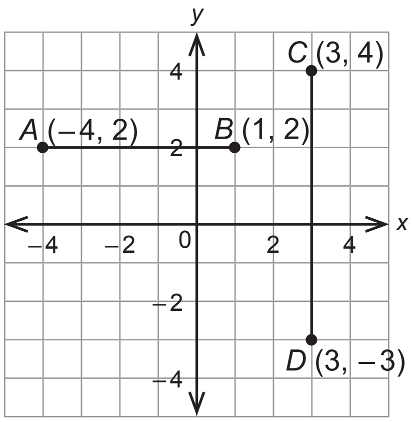
RECUERDA:

1. Para encontrar la distancia entre dos puntos situados en la misma recta horizontal, encontramos el valor absoluto de la variación en x.

   Longitud de $AB = |\text{variación en } x| = |1 - (-4)| = 5$

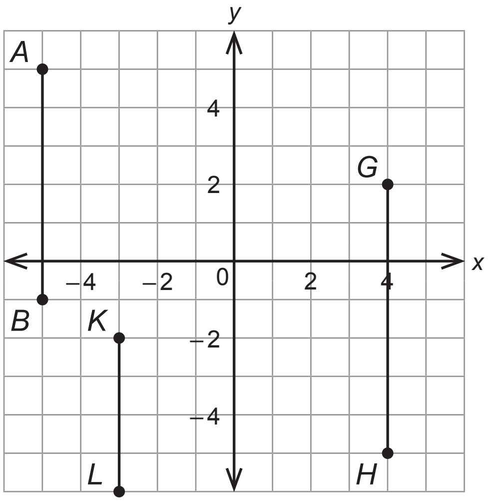
2. Para encontrar la distancia entre dos puntos situados en la misma recta vertical, encontramos el valor absoluto de la variación en y.

   Longitud de $CD = |\text{variación en } y| = |4 - (-3)| = 7$



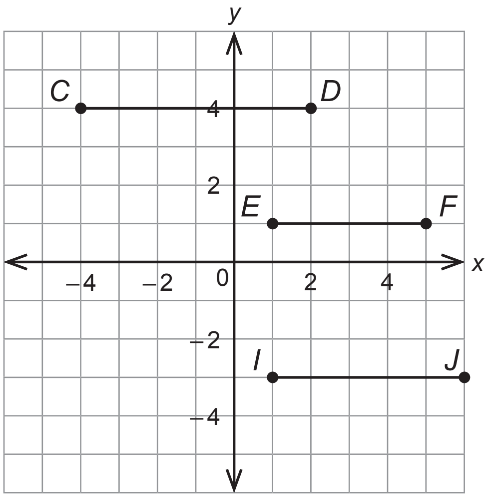
1. Encuentra las coordenadas de los puntos. A continuación, encuentra la distancia entre los puntos.

	Puntos	Distancia
a)	A (−5 , 5) B (−5 , −1)	$\|5 - (-1)\| = 6$
b)	G (_____, _____) H (_____, _____)	
c)	K (_____, _____) L (_____, _____)	



2. Encuentra las coordenadas de los puntos. A continuación, Encuentra la distancia entre los puntos.

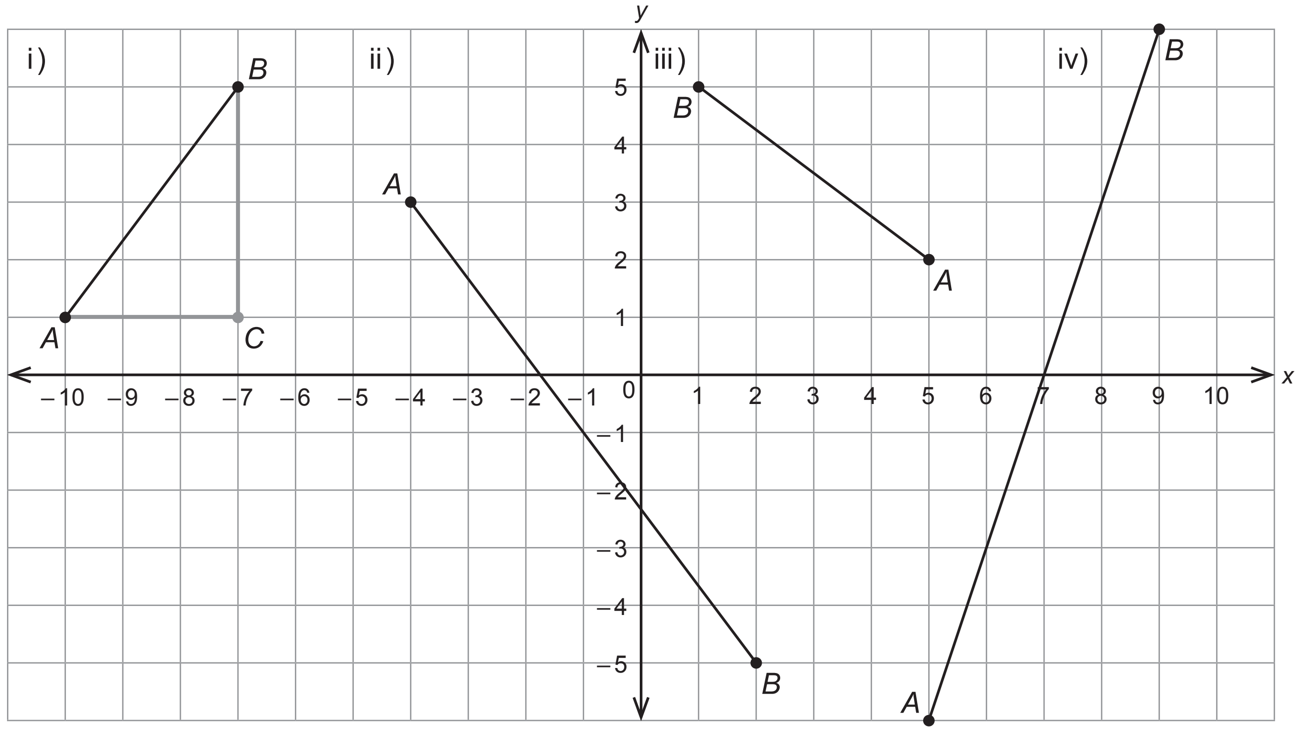
	Puntos	Distancia
a)	C (_____, _____) D (_____, _____)	
b)	E (_____, _____) F (_____, _____)	
c)	I (_____, _____) J (_____, _____)	



3. Encuentra la distancia entre los puntos.

a) $A(-3, 4)$ $B(-3, 9)$ b) $C(-5, 3)$ $D(6, 3)$ c) $E(0, -3)$ $F(0, -9)$

4. a) Dibuja los triángulos rectángulos a los que corresponden las hipotenusas dadas. Identifica el nuevo vértice como C y marca los lados correspondientes como a, b y c.



b) Encuentra las coordenadas de A, B y C de cada triángulo del ejercicio a).
A continuación, encuentra las longitudes de a y b.

	Coordenadas de *A*	Coordenadas de *B*	Coordenadas de *C*	Longitud de *a*	Longitud de *b*
i)	$(-10, 1)$	$(-7, 5)$	$(-7, 1)$	$\lvert 5 - 1 \rvert = 4$	$\lvert -7 - (-10) \rvert = 3$
ii)					
iii)					
iv)					

c) Usa la longitud de los lados y el teorema de Pitágoras para encontrar la longitud de c de los triángulos anteriores.

i) $a = \underline{\ 4\ }$ $b = \underline{\ 3\ }$ ii) $a =$ ______ $b =$ ______

$c^2 = a^2 + b^2 = 4^2 + 3^2 = 25$

$c = \sqrt{25} = 5$

iii) $a =$ ______ $b =$ ______ iv) $a =$ ______ $b =$ ______

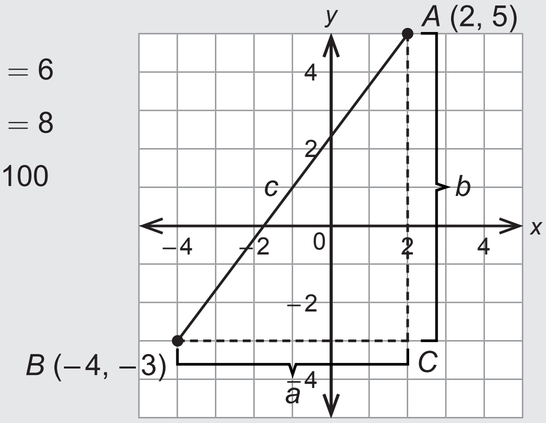
Para encontrar la distancia entre dos puntos:

Paso 1: Encontramos la |variación en *x*|. $a = |2 - (-4)| = 6$

Paso 2: Encontramos la |variación en *y*|. $b = |5 - (-3)| = 8$

Paso 3: Encontramos $c^2 = a^2 + b^2$. $c^2 = 6^2 + 8^2 = 100$

Paso 4: Calculamos la raíz cuadrada para encontrar *c*. $c = \sqrt{100} = 10$



5. Señala los puntos *A* y *B* en una cuadrícula. Encuentra la longitud del segmento *AB* redondeada a las décimas siguiendo los pasos anteriores.

a) *A* (–4, 6) *B* (–1, 2)
b) *A* (7, 1) *B* (1, –7)
c) *A* (–4, –2) *B* (1, 10)
d) *A* (3, –5) *B* (–1, 1)
e) *A* (–2, 3) *B* (–7, 9)
f) *A* (7, 0) *B* (0, –3)

Para encontrar la distancia entre dos puntos (*A* y *B*) sin un dibujo, podemos utilizar la fórmula:

$$d_{AB} = \sqrt{|\text{variación en } x|^2 + |\text{variación en } y|^2}$$

Ejemplo: *A* (3, 5) *B* (8, –7) $d_{AB} = \sqrt{|8 - 3|^2 + |-7 - 5|^2} =$

$$= \sqrt{5^2 + 12^2} =$$

$$= \sqrt{169} = 13 =$$

6. Utiliza la fórmula para encontrar la distancia entre dos puntos. Redondéala a las décimas.

a) *D* (–3, –1) *E* (4, 3)
b) *C* (7, –3) *D* (2, 9)
c) *A* (–4, 7) *B* (2, –1)

d) *F* (–4, –6) *G* (4, 9)
e) *H* (2, 4) *J* (3, –4)
f) *K* (–5, 2) *M* (3, 5)

7. Las coordenadas de los vértices de un triángulo son *A* (0, 3), *B* (–6, 3) y (–6,–5).

a) Utiliza la fórmula de la distancia para encontrar las longitudes de los lados *AB*, *BC* y *AC*.

b) Encuentra el perímetro del triángulo.

c) Utiliza el teorema de Pitágoras para demostrar que ΔABC es un triángulo rectángulo.

d) Encuentra el área del triángulo.

EE8-49 Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales

RECUERDA: En la expresión $3h + 2$, $3h$ también se puede expresar como $3 \times h$.

1. Sustituye la variable por el número indicado. Después, calcula.

a) $3h + 2, \quad h = 4$

$= 3(4) + 2 =$

$= 12 + 2 =$

$= 14$

b) $2p + 8, \quad p = -3$

c) $-3x - 4, \quad x = -2$

d) $4q - 3, \quad q = 0$

e) $-5m + 2, \quad m = 0{,}2$

f) $\frac{-3}{4}d + \frac{3}{4}, \quad d = \frac{3}{4}$

En la tabla de valores de una función, la relación entre las dos variables indica cómo calcular la salida para cada entrada, y con dicho cálculo se obtiene un par ordenado.

Ejemplo: $y = 2x - 1$

$y = 2(3) - 1 = 5 \qquad (x, y) = (3, 5)$

x	***y* = 2*x* − 1**
1	1
2	3
3	5
4	7

2. Usa la relación entre las dos variables para completar las tablas de valores.

a) $y = 2x + 1$

x	***y***
1	
2	
3	
4	
5	

b) $y = -3x + 4$

x	***y***
1	
2	
3	
4	
5	

c) $y = x + 5$

x	***y***
1	
2	
3	
4	
5	

d) $y = 4x - 3$

x	***y***
−2	
−1	
0	
1	
2	

e) $y = -2x - 1$

x	***y***
−2	
−1	
0	
1	
2	

f) $y = -\frac{3}{4}x + 2$

x	***y***
−8	
−4	
0	
4	
8	

3. Identifica el par ordenado que aparece en las dos tablas.

a)

x	y
-2	1
-1	3
0	5
1	7
2	9

x	y
-1	1
0	4
1	7
2	10
3	13

(1, 7)

b)

x	y
-3	6
-2	4
-1	2
0	0
1	-2

x	y
-4	-1
-3	0
-2	1
-1	2
0	3

____

c)

x	y
5	3
2	-1
-3	-5
0	-2
4	2

x	y
5	-7
0	-2
-3	1
4	-6
2	-4

____

4. Completa las siguientes tablas de valores. Después, encuentra el par ordenado que aparece en las dos tablas.

a) $y = x - 3$ $\quad$ $y = 2x - 2$

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	

____

b) $y = -x + 4$ $\quad$ $y = x + 8$

x	y
-5	
-4	
-3	
-2	
-1	

x	y
-5	
-4	
-3	
-2	
-1	

____

c) $y = \frac{1}{2}x - 3$ $\quad$ $y = -\frac{1}{2}x - 1$

x	y
-2	
0	
2	
4	
6	

x	y
-2	
0	
2	
4	
6	

____

d) $y = 2x - 1$, $y = 3x + 5$
Pista: Usa $-10 \leq x \leq -5$.

e) $y = -3x - 3$, $y = -5x + 7$
Pista: Usa $1 \leq x \leq 6$.

f) $y = \frac{1}{2}x + 2$, $y = \frac{3}{2}x - 4$
Pista: Usa $2 \leq x \leq 8$.

5. Carla cree que las tablas de valores de las funciones $y = x - 1$ e $y = 2x - 4$ no tienen ningún par ordenado en común.

a) Completa las tablas de valores de las funciones.

b) ¿Tienen algún par ordenado en común? ________

c) Añade otra fila a cada tabla, con $x = 3$. Encuentra las coordenadas y.

d) ¿Tiene razón Carla? ¿Puedes afirmar, simplemente observando las tablas de valores, si habrá un par ordenado común? Justifica tu respuesta.

$y = x - 1$

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	

$y = 2x - 4$

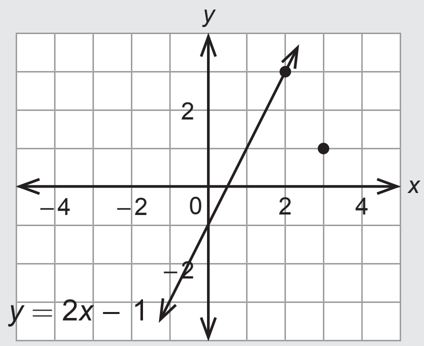
x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	

EE8-50 Representación gráfica de sistemas de ecuaciones lineales (introducción)

Si un punto pertenece a una recta, sus coordenadas verifican la ecuación de la recta.

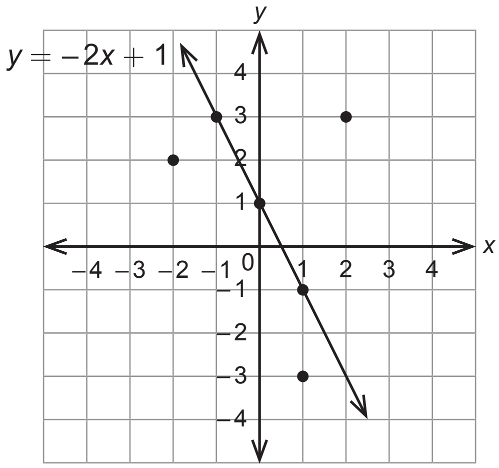
Ejemplo: $y = 2x - 1$

(2, 3) está en la recta, porque $3 = 2(2) - 1$.
(3, 1) no está en la recta, porque $1 \neq 2(3) - 1$.



1. Usa la ecuación de la recta para determinar si los puntos pertenecen a la recta $y = -2x + 1$.

Punto	Cálculo	¿Pertenece a la recta?
(2, 3)	*$3 \neq -2(2) + 1$*	*no*
(−1, 3)	*$3 = -2(-1) + 1$*	*sí*
(0, 1)		
(1, −3)		
(1, −1)		
(−2, 2)		



2. Sin representar gráficamente la ecuación, determina si los puntos pertenecen a la recta.

a) $y = 3x - 4$
punto: (2, −3)

b) $y = -2x + 5$
punto: (3, −1)

c) $y = x + 5$
punto: (−1, 4)

d) $y = -x - 2$
punto: (3, 5)

3. Demuestra que el punto pertenece a las dos rectas.

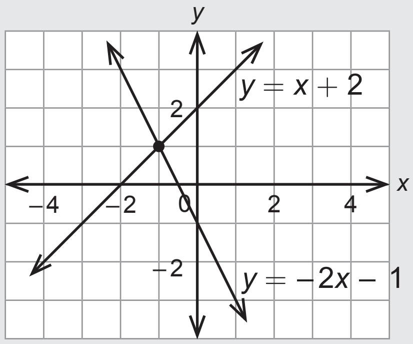
a) $y = 4x - 5$ — *$3 = 4(2) - 5$* — *(2, 3) pertenece a la recta $y = 4x - 5$.*
$y = -2x + 7$ — *$3 = -2(2) + 7$* — *(2, 3) pertenece a la recta $y = -2x + 7$.*
punto: (2, 3) — *Por tanto, (2, 3) pertenece a las dos rectas.*

b) $y = 3x - 2$
$y = -5x + 6$
punto: (1, 1)

c) $y = -2x + 1$
$y = -6x - 3$
punto: (−1, 3)

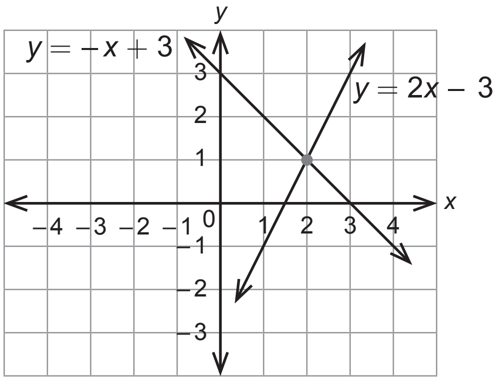
El **punto de intersección** de dos rectas es el punto que ambas rectas tienen en común.

Ejemplo: (–1, 1) es el punto de intersección de las rectas $y = x + 2$ e $y = -2x - 1$.



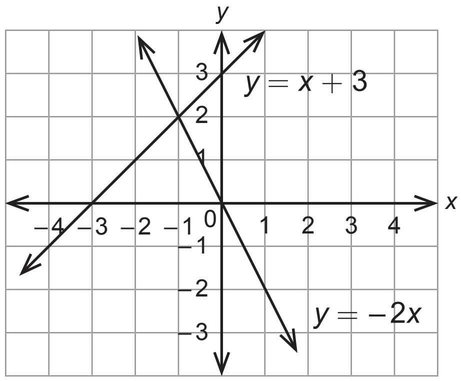
4. Escribe las coordenadas del punto de intersección.

a)



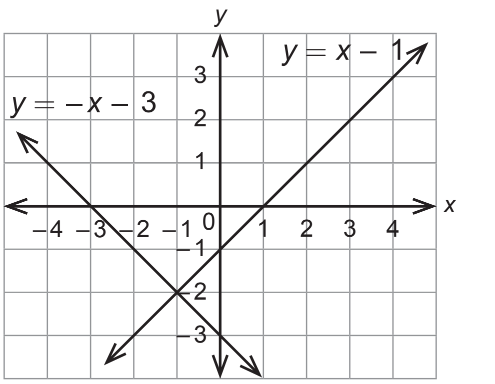
punto de intersección: (,   )

b)



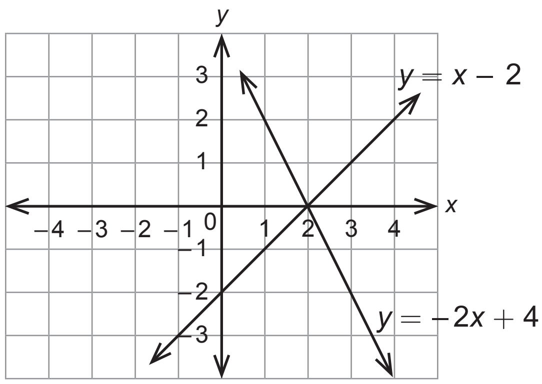
punto de intersección: (,   )

c)



punto de intersección: (,   )

d)



punto de intersección: (,   )

5. Demuestra que las coordenadas de los puntos de intersección del ejercicio 4 cumplen las dos ecuaciones.

	Punto	**Primera recta**	**Comprobación**	**Segunda recta**	**Comprobación**
a)	*(2, 1)*	$y = -x + 3$	$1 = -(2) + 3$	$y = 2x - 3$	$1 = 2(2) - 3$
b)		$y = x + 3$		$y = -2x$	
c)		$y = -x - 3$		$y = x - 1$	
d)		$y = x - 2$		$y = -2x + 4$	

6. Julia cree que $(3, -1)$ es el punto de intersección de las rectas $y = -x + 4$ e $y = 2x - 3$. ¿Tiene razón? Justifica tu respuesta.

7. Para cada par de rectas:

a) Completa las tablas de valores. Encuentra el punto de intersección a partir de las tablas.

b) Usa las coordenadas para representar gráficamente e identificar las rectas. Identifica el punto de intersección en el sistema de coordenadas.

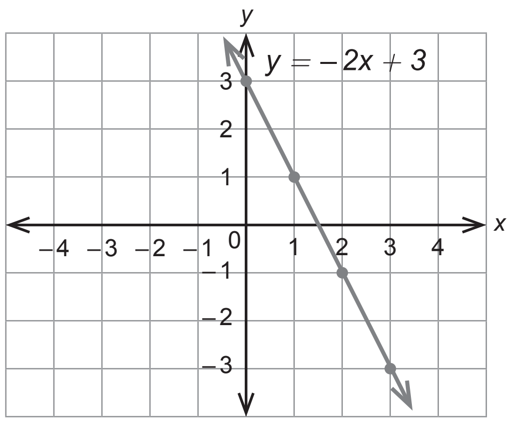
c) ¿Los puntos de intersección de *a*) y *b*) son iguales? Comprueba que los puntos de intersección cumplen las dos ecuaciones.

i) $y = -2x + 3$ $\quad$ $y = x - 3$

x	**y**
0	*3*
1	*1*
2	*−1*
3	*−3*
4	*−5*

x	**y**
1	
2	
3	
4	
5	

Comprobación:



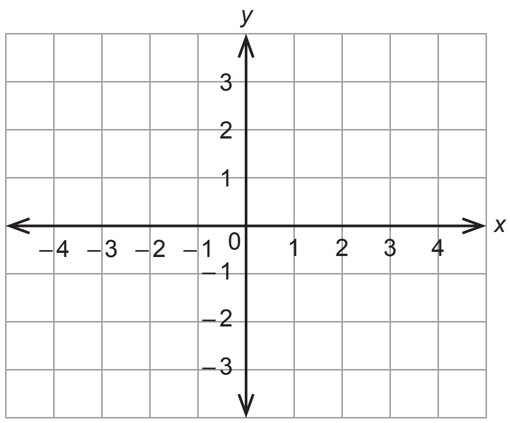
punto de intersección: (,)

ii) $y = -x + 1$ $\quad$ $y = 2x - 2$

x	**y**
−2	
−1	
0	
1	
2	

x	**y**
−1	
0	
1	
2	
3	

Comprobación:



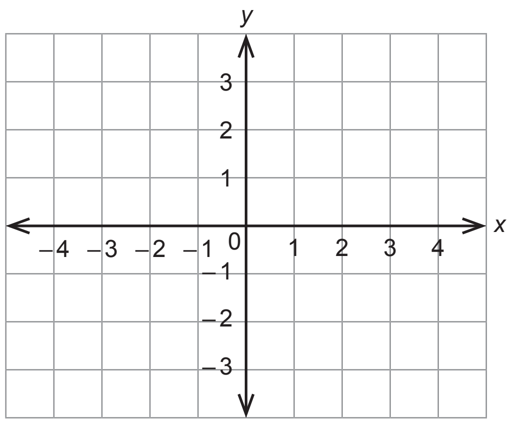
punto de intersección: (,)

iii) $y = -3x + 2$ $\quad$ $y = x - 2$

x	**y**
−1	
0	
1	
2	
3	

x	**y**
−1	
0	
1	
2	
3	

Comprobación:



punto de intersección: (,)

EE8-51 Resolución gráfica de sistemas de ecuaciones lineales

RECUERDA: Una recta de ecuación $y = 2x + 3$ tiene pendiente $= 2$ e intersección con el eje $y = 3$.

1. Encuentra la pendiente y la intersección con el eje y de las siguientes ecuaciones.

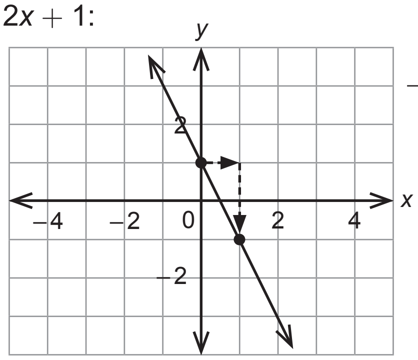
Ecuación	$y = 3x + 4$	$y = -2x + 5$	$y = -x + 2$	$y = 5x$	$y = -3x - 2$
Pendiente	*3*				
Int. del eje *y*	*4*				

RECUERDA: Para representar gráficamente la recta $y = -2x + 1$:

Paso 1: Señalamos el punto de la intersección con el eje y.

Paso 2: Para una pendiente $\frac{-2}{1}$, contamos 1 unidad hacia la derecha desde la intersección con el eje y (para un desplazamiento horizontal de 1) y 2 unidades hacia abajo (para un desplazamiento vertical de -2) y señalamos otro punto.

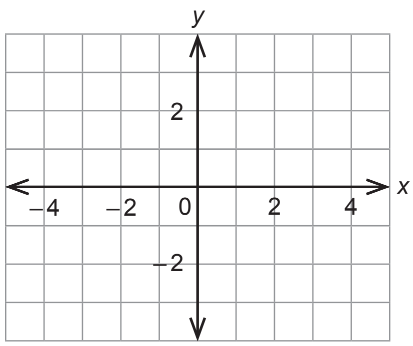
Paso 3: Unimos los puntos con una recta.



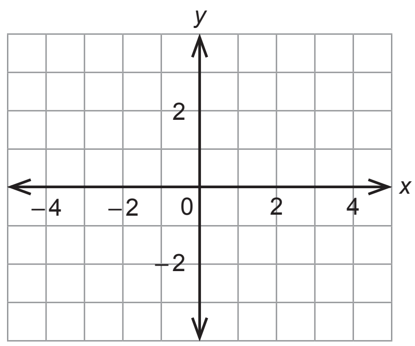
$\frac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \frac{-2}{1}$

2. Encuentra la pendiente (m) y la intersección con el eje y (int. y). Después, representa la gráfica de la recta.

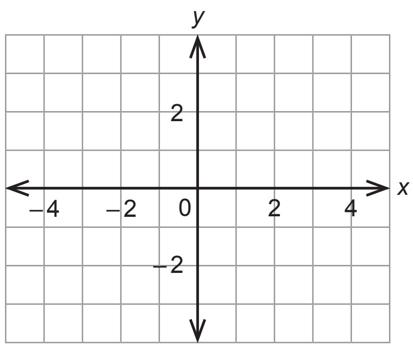
a) $y = 2x - 1$ $m =$ ______ int. $y =$ ______



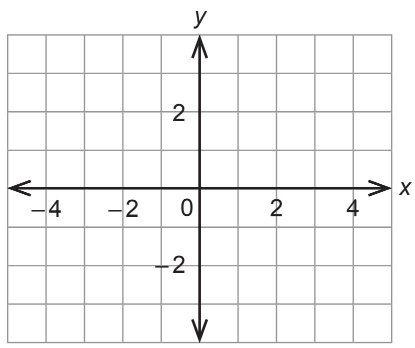
b) $y = -3x + 1$ $m =$ ______ int. $y =$ ______



c) $y = -x + 2$ $m =$ ______ int. $y =$ ______



d) $y = 3x - 2$ $m =$ ______ int. $y =$ ______

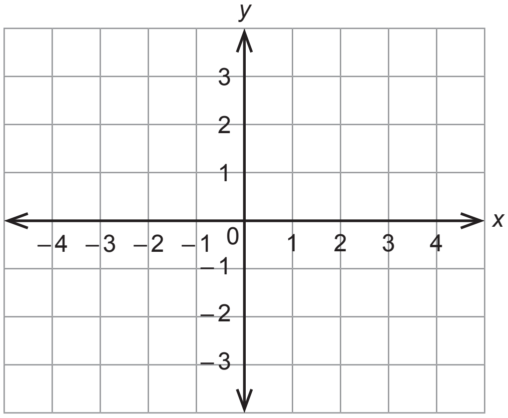


Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto de dos ecuaciones. Se representa con dos rectas. Para **resolver un sistema de ecuaciones**, hay que encontrar el punto de intersección de las dos rectas.

3. Representa gráficamente las rectas. Encuentra primero su pendiente y su intersección con el eje *y*. Después, resuelve el sistema de ecuaciones.

a) $y = 2x - 3$ $m =$ ______ int. $y =$ ______

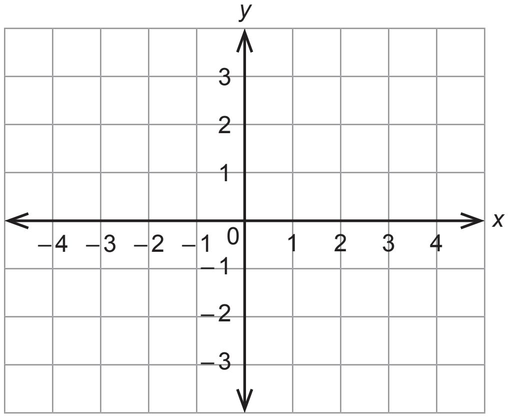
$y = -3x + 2$ $m =$ ______ int. $y =$ ______



punto de intersección: (,   )

b) $y = x + 3$ $m =$ ______ int. $y =$ ______

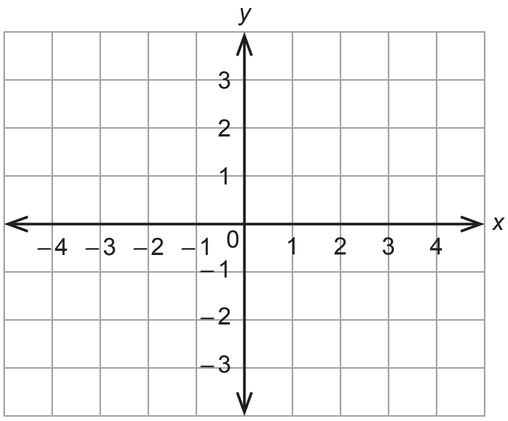
$y = -x + 1$ $m =$ ______ int. $y =$ ______



punto de intersección: (,   )

c) $y = 3x - 2$ $m =$ ______ int. $y =$ ______

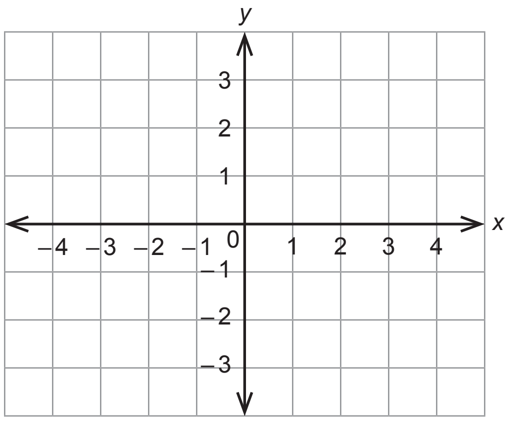
$y = -2x + 3$ $m =$ ______ int. $y =$ ______



punto de intersección: (,   )

Extra ▶ $y = 2x - 4$ $m =$ ______ int. $y =$ ______

$y = -2$ $m =$ ______ int. $y =$ ______



punto de intersección: (,   )

4. Ramón representa gráficamente las rectas $y = 2x + 3$ e $y = 2x + 1$, pero no puede encontrar el punto de intersección.

a) Encuentra la pendiente de cada recta. ¿Qué observas?

b) ¿Qué puedes afirmar sobre las rectas que tienen la misma pendiente?

c) Explica si Ramón puede o no encontrar el punto de intersección.

ESP_2ESO-2_LA_XILE_p136-155.indd 142 10/2/20 22:52

EE8-52 Resolución gráfica de problemas

En algunos problemas se da un coste por unidad y una tarifa fija. Ejemplo: Samir quiere arrendar una bicicleta, y el coste (y) incluye una tarifa fija y el coste por hora (x).

En Todos sobre ruedas, el arriendo es de $300 por hora, más una tarifa fija fija de $700.

$y = 300x + 700$ → tarifa fija
→ precio por hora

En Bicilandia, el arriendo es de $200 por hora, y la tarifa fija, de $1.100.

$y = 200x + 1.100$ → tarifa fija
→ precio por hora

1. Plantea dos ecuaciones para los siguientes problemas en los que aparece una tarifa fija.

a) En Camisetas Tomás, cobran $600 por estampar cada camiseta, más una tarifa inicial de $3.200. ______

En Modas Viviana, cobran $400 por estampar cada camiseta, más una tarifa inicial de $3.800. ________

b) Bodas y Bautizos cobra $500 por hora, más una tarifa fija de $3.300. ____________________

Grabaciones Avenida cobra $600 por hora, más una tarifa fija de $2.500. ____________________

c) En Pepita Papeles, hacer fotocopiar cuesta $50 por página, más una tarifa fija de $150. __________

En Librería Ahmed, hacer fotocopiar cuesta $30 por página, más una tarifa fija de $240. ________

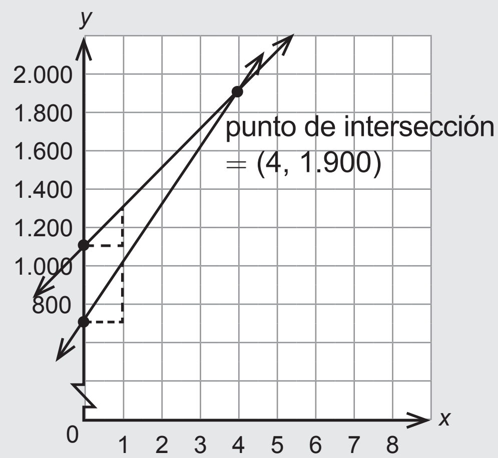
Alicia quiere arrendar una bicicleta durante un número determinado de horas y dice que le cuesta lo mismo en Todos sobre ruedas y en Bicilandia. ¿Durante cuántas horas quiere arrendar la bicicleta Alicia? ¿Cuánto le cuesta?

Ecuación	**Pendiente**	**Int. del eje *y***
$y = 300x + 700$	300	700
$y = 200x + 1.100$	200	1.100

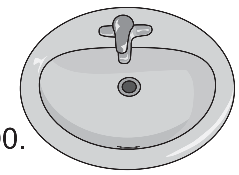
punto de intersección = (4, 1.900)

Por tanto, Alicia quiere arrendar la bicicleta durante 4 horas.
El coste total es de $1.900

Comprobación: $1.900 = 300(4) + 700$ y $1.900 = 200(4) + 1.100$



2. Plantea las ecuaciones para los siguientes problemas. Después, resuélvelos gráficamente.



a) Fontaneros S. A. cobra $2.400 por hora, más una tarifa fija de $5.000. Reparaciones Martínez cobra $2.000 por hora y una tarifa fija de $7.000. ¿Por cuántas horas cobran el mismo total las dos empresas?

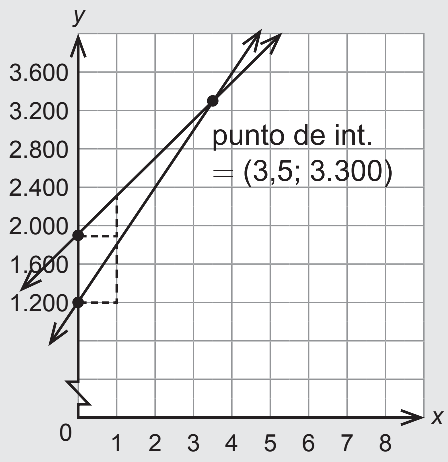
b) En una compañía telefónica, el Plan A cuesta $4.000 por el servicio básico, más $1.500 por cada unidad de datos adicional. El Plan B cuesta $5.500 por el servicio básico, más $1.000 por cada unidad de datos adicional. ¿En qué situación cuestan lo mismo los dos planes?

El punto de intersección puede incluir fracciones o decimales.

Ejemplo: Estacionamientos Centro cobra una tarifa de $1.200 por estacionar un auto y $600 por hora. En Parking Plaza, la tarifa fija es de $1.900 y el precio por hora, $400.

María calcula que, para el número de horas que necesita tener el auto estacionado, las dos empresas le cobran lo mismo.

¿Durante cuántas horas necesita tener estacionado el auto María? ¿Cuál es el coste total del estacionamiento?



Ecuación	Pendiente	Int. del eje *y*
$y = 600x + 1.200$	600	1.200
$y = 400x + 1.900$	400	1.900

punto de intersección = (3,5; 3.300)

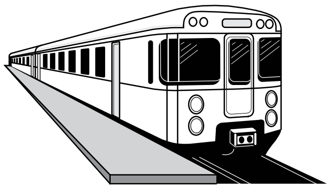
Por tanto, María necesita tener estacionado el auto durante 3,5 horas. El coste total es de $3.300.

Comprobación: 3.300 = 600(3,5) + 1.200 y 3.300 = 400(3,5) + 1.900

3. Explica por qué resulta difícil encontrar el punto de intersección exacto en la gráfica cuando incluye fracciones o decimales.

4. Plantea las ecuaciones para los siguientes problemas. Después, resuélvelos gráficamente. El punto de intersección puede contener fracciones o decimales.

a) Dos trenes salen de la Estación Central en diferentes instantes. El tren A está a 12 km de la estación y se desplaza a 60 km/h. El tren B está a 27 km de la estación y se desplaza a 50 km/h. ¿Cuándo alcanzará el tren A al tren B? ¿A qué distancia estarán de la estación?



b) Algunas variedades de bambú crecen varios centímetros en un día. El bambú A mide 28 cm de alto y crece 3 cm al día. El bambú B mide 21 cm de alto y crece 5 cm al día. ¿Cuándo tendrán la misma altura los dos bambúes? ¿Qué altura tendrán?

c) En Alberto Técnicos cobran $9.250 por inicio de servicio y $2.000 por cada 30 minutos de trabajo. En Felisa Reparaciones cobran $8.000 por inicio de servicio, más $2.500 por cada 30 minutos de trabajo. ¿Al cabo de cuánto tiempo una reparación costará lo mismo en las dos empresas?

d) Julia gana $3.500.000 al año y recibe un aumento de $200.000 cada año. Helena gana $4.500.000 al año y recibe un aumento de $150.000 cada año. ¿Al cabo de cuántos años Julia y Helena ganarán lo mismo?

EE8-53 Resolución algebraica de sistemas de ecuaciones I

En la tabla de valores de una función, la ecuación indica la relación que permite encontrar los valores. La ecuación $y = 2x + 1$ indica que, para encontrar la coordenada y, debemos multiplicar la coordenada x por 2 y después, sumar 1.

Decimos que el **punto genérico** de la recta $y = 2x + 1$ tiene las coordenadas $(x, 2x + 1)$.

x	$y = 2x + 1$
1	3
2	5
3	7
4	9
x	$2x + 1$

1. Completa las tablas. Escribe las coordenadas de los puntos genéricos.

a)

x	$y = 2x - 1$
1	
2	
3	
4	
x	

punto genérico: (,)

b)

x	$y = 3x - 4$
1	
2	
3	
4	
x	

punto genérico: (,)

c)

x	$y = -2x + 5$
1	
2	
3	
4	
x	

punto genérico: (,)

2. Escribe las coordenadas de los puntos genéricos de las rectas.

a) $y = 4x + 3$

$(x, 4x + 3)$

b) $y = x - 5$

____

c) $y = -x + 3$

____

RECUERDA: Las coordenadas del punto de intersección cumplen las ecuaciones de las dos rectas.

3. Dadas las ecuaciones de dos rectas secantes y la coordenada x del punto de intersección (punto de int.), sustituye la coordenada x en la ecuación de cualquiera de las dos rectas para encontrar la coordenada y del punto de intersección.

a) $y = 3x - 2$

$y = 2x + 5$

punto de int. = (7, ?)

$y = 3(7) - 2 = 19$

o

$y = 2(7) + 5 = 19$

Por tanto, punto de int. = *(7, 19)*

b) $y = -2x + 1$

$y = 2x - 3$

punto de int. = (1, ?)

c) $y = 2x + 4$

$y = -x - 2$

punto de int. = (−2, ?)

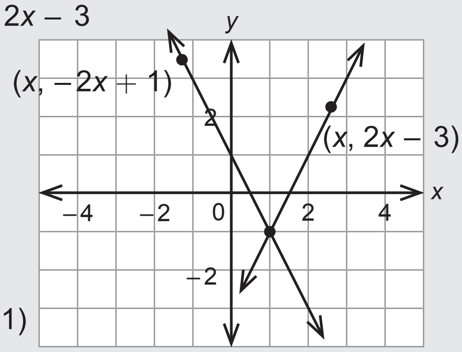
Para encontrar algebraicamente el punto de intersección de dos rectas:

Paso 1: Planteamos una ecuación igualando las coordenadas y de los dos puntos genéricos. Ejemplo: $-2x + 1 = 2x - 3$

Paso 2: Resolvemos la ecuación para encontrar x. $x = 1$

Paso 3: Sustituimos x en la ecuación de cualquiera de las dos rectas para encontrar y. $y = -1$

Paso 4: Escribimos el punto de intersección (x, y) a partir de los resultados de los pasos 2 y 3. punto de int. $= (1, -1)$



4. Efectúa el paso 1 para plantear la ecuación del punto de intersección.

a) $y = 2x - 3$

$y = -2x + 1$

En el punto de int.:

$2x - 3 = -2x + 1$

b) $y = -3x - 4$

$y = 2x + 1$

c) $y = x - 4$

$y = -3x + 8$

d) $y = 4x - 8$

$y = -3x + 13$

e) $y = 2x - 1$

$y = -3x - 11$

f) $y = 6x - 17$

$y = -3x + 19$

5. Efectúa el paso 2 en las ecuaciones del ejercicio 4 para encontrar x.

a) $2x - 3 = -2x + 1$

$2x + 2x = 1 + 3$

$4x = 4$

$4x : 4 = 4 : 4$

$x = 1$

b)

c)

d)

e)

f)

6. Para las rectas de los ejercicios 4 y 5, efectúa los pasos 3 y 4 para encontrar el punto de intersección.

a) $y = 2x - 3$

$y = -2x + 1$

$x = 1$

$y = 2(1) - 3 = -1$

o

$y = -2(1) + 1 = -1$

Así, el punto de int. $= (1, -1)$

b) $y = -3x - 4$

$y = 2x + 1$

c) $y = x - 4$

$y = -3x + 8$

d) $y = 4x - 8$

$y = -3x + 13$

e) $y = 2x - 1$

$y = -3x - 11$

f) $y = 6x - 17$

$y = -3x + 19$

7. Encuentra el punto de intersección de las rectas y comprueba que verifica la ecuación de las dos rectas

a) $y = 2x + 3$

$y = -3x - 7$

En el punto de int.:

$2x + 3 = -3x - 7$

$2x + 3x = -7 - 3$

$5x = -10$

$5x : 5 = -10 : 5$

$x = -2$

En el punto de int.:

$y = 2(-2) + 3 = -1$

Así, el punto de int. $=$

$= (-2, -1)$

Comprobación:

$-1 = 2(-2) + 3$

$-1 = -3(-2) - 7$

b) $y = -x + 3$

$y = x + 7$

c) $y = -2x - 8$

$y = -x + 2$

d) $y = 6x + 32$

$y = -2x - 24$

e) $y = -x + 3$

$y = -2x + 1$

f) $y = -3x - 8$

$y = -4x + 6$

EE8-54 Resolución algebraica de sistemas de ecuaciones II

Para encontrar la pendiente y la intersección con el eje y de una recta, despejamos y.

Ejemplo:
$$x + 2y = 4$$
$$x + 2y - x = 4 - x$$
$$2y = -x + 4$$
$$y = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\text{pendiente}}x + \underbrace{2}_{\text{int. con el eje } y}$$

1. Despeja y. Después, encuentra la pendiente y la intersección con el eje y.

a) $3x + y = 5$

$m =$ ________

int. con el eje $y =$ ________

b) $x - 3y = 1$

$m =$ ________

int. con el eje $y =$ ________

c) $2x + 3y = 4$

$m =$ ________

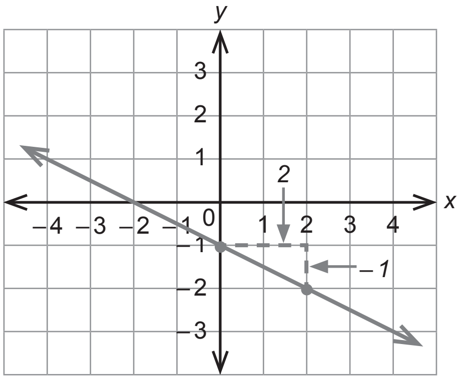
int. con el eje $y =$ ________

2. Despeja y de cada recta para encontrar la pendiente y la intersección con el eje y. Anota los valores en las tablas. Después, representa las rectas y encuentra el punto de intersección.

a)

Ecuación	Forma $y = mx + b$	Pendiente	Int. con el eje y
$x + 2y = -2$	$y = \frac{-1}{2}x - 1$	$\frac{-1}{2}$	-1
$x - y = 4$	$y = x - 4$		

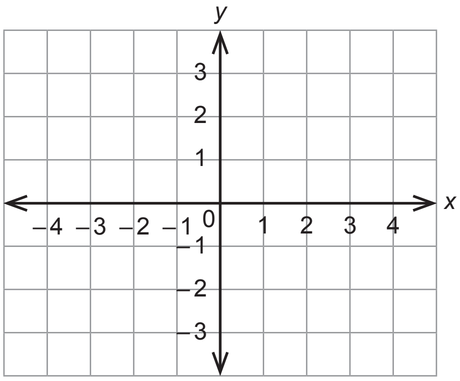
Punto de intersección: (,)



b)

Ecuación	Forma $y = mx + b$	Pendiente	Int. con el eje y
$x + y = 4$			
$2x - y = -1$			

Punto de intersección: (,)



Para resolver algebraicamente el sistema $\begin{array}{l} x - y = 5 \\ x + 2y = -1 \end{array}$:

Paso 1: Despejamos y en ambas ecuaciones.

$$y = x - 5$$
$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

Paso 2: En el punto de intersección, las coordenadas y son iguales. Planteamos la ecuación.

$$x - 5 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$
$$\ldots$$

Paso 3: Encontramos x.

$$\frac{3}{2}x = \frac{9}{2}$$
$$3x = 9$$
$$x = 3$$

Paso 4: Resolvemos una de las ecuaciones iniciales para encontrar y en el punto de intersección.

En el punto de intersección:
$$3 - y = 5$$
$$y = 3 - 5 = -2$$

Paso 5: Escribimos el punto de intersección y comprobamos el resultado en las dos ecuaciones.

punto de int.: $= (3, -2)$
Comprobación: $3 - (-2) = 5$
$3 + 2(-2) = -1$

3. Resuelve algebraicamente los siguientes sistemas. Comprueba el resultado en las dos ecuaciones.

a) $x - y = 3$
$x + y = 7$

b) $2x - y = 5$
$3x + y = 10$

c) $x + y = -2$
$x + 3y = -8$

d) $x + 2y = 6$
$x + 3y = 9$

EE8-55 Resolución algebraica de problemas (ampliación)

En los problemas suelen aparecer palabras que indican las siguientes operaciones:

- **Suma:** sumar, más, más que, total
- **Resta:** menos que, menos, diferencia
- **Multiplicación:** producto, dos veces, duplicar
- **División:** cociente, razón, mitad, tercio

Normalmente, palabras como *es*, *son* o *vale* indican dónde escribir el **signo igual**.

La suma de dos números x e y es 35.

$x + y \quad = 35$

Un número es 5 más que dos veces otro número.

$y \quad = 5 \quad + \quad 2x$

1. Expresa los siguientes enunciados como una ecuación usando dos variables, x e y. Primero, explica qué representa cada variable.

a) Un número es dos veces otro número menos 3 unidades.

Supongamos que el primer número es x y el segundo número es y. $x = 2y - 3$

b) La diferencia entre dos números es 7.

Supongamos que el número mayor es x y el número menor es y. ______________

c) La suma de dos veces un número y tres veces otro número es 35.

____

d) Natalia tiene $3.700 en la cartera, entre monedas de $100 y $500.

____

2. Plantea dos ecuaciones para los siguientes problemas. Usa dos variables en cada ecuación.

a) Un rectángulo mide el doble de largo que de ancho. Su perímetro es de 100 cm. ¿Cuánto mide de largo y de ancho?

Supongamos que el rectángulo mide x de largo e y de ancho.

$x = 2y$ $\qquad$ $2x + 2y = 100$

b) Juan tiene $1.500 en monedas de $50 y de $100. Si en total tiene 20 monedas, ¿cuántas monedas tiene de cada tipo?

______________ $\qquad$ ______________

c) El público de un espectáculo son 140 personas. Las entradas de adulto valen $5.000 y las entradas de niños, $3.000. El valor total de las entradas vendidas es de $620.000. ¿Cuántas entradas se han vendido de adultos y cuántas de niños?

______________ $\qquad$ ______________

Para resolver un problema con un sistema de ecuaciones lineales:	Ejemplo: La suma de dos números es 12. Su diferencia es 6. ¿Qué números son?
Paso 1: Indicamos qué representa cada variable y planteamos las ecuaciones.	Supongamos que x es el número mayor. Supongamos que y es el número menor. la suma de los dos números $x + y = 12$ $x - y = 6$ la diferencia entre los números
Paso 2: Despejamos y en cada ecuación.	$y = 12 - x$ $y = x - 6$
Paso 3: Planteamos una ecuación para el valor de y en el punto de intersección.	En el punto de intersección: $12 - x = x - 6$
Paso 4: Resolvemos la ecuación.	$-2x = -18$ $x = 9$
Paso 5: Encontramos la coordenada y del punto de intersección.	$y = 12 - 9 = 3$
Paso 6: Escribimos la solución.	El número mayor es 9. El número menor es 3.
Paso 7: Comprobamos los resultados.	Comprobación: $9 + 3 = 12$ $9 - 3 = 6$

3. La suma de dos números es 15. La diferencia entre los dos números es 3. Encuentra los números.

4. Juan tiene en el bolsillo monedas de $500 y monedas de $100. En total tiene 16 monedas con un valor de $6.400. ¿Cuántas monedas de $500 tiene?

5. Clara tiene 5 sellos más que Ahmed. Si tuviera 6 sellos más, tendría el doble de sellos que Ahmed. ¿Cuántos sellos tiene cada uno?

6. Divide 36 en dos partes, de modo que la parte mayor sea 3 veces la parte menor. ¿Cuánto hay en cada parte?

7. Los ángulos A y B son complementarios. El ángulo A es 18 grados mayor que el ángulo B. ¿Cuánto mide cada ángulo?

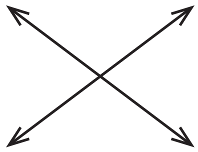
8. Berta es 5 años mayor que Blanca. Dentro de 3 años, sus edades sumarán 25. ¿Cuántos años tiene ahora Berta?

9. En una granja hay 13 animales. Una parte son gallinas y el resto, vacas. Hay 40 patas en total. ¿Cuántas gallinas hay en la granja?

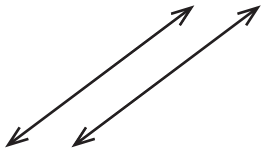
10. Las dos cifras de un número suman 7. El número que se forma al invertir las cifras es el número inicial menos 45 unidades. ¿Cuál es el número inicial? Recuerda que puedes encontrar el valor de un número de dos cifras multiplicando cada cifra por su valor posicional y sumando los productos.

EE8-56 Resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante la observación

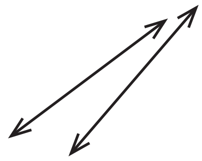
1. Rodea la descripción aplicable a las rectas.

a) 

paralelas   no paralelas

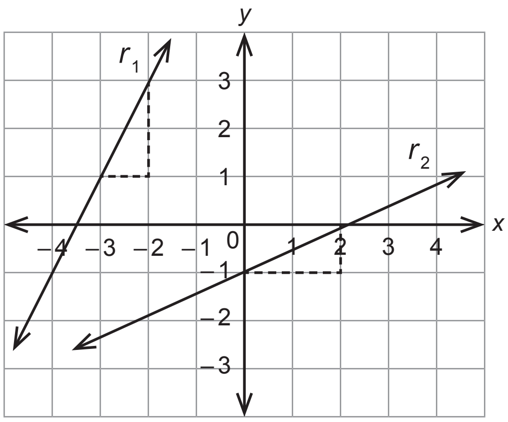
b) 

paralelas   no paralelas

c) 

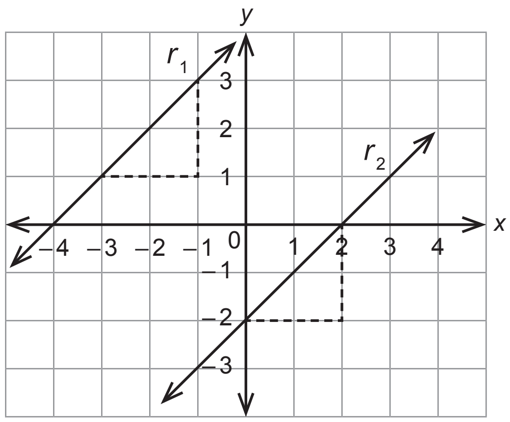
paralelas   no paralelas

2. Usa el desplazamiento horizontal y el vertical para encontrar la pendiente de cada recta. Después, rodea la descripción aplicable.

a) 

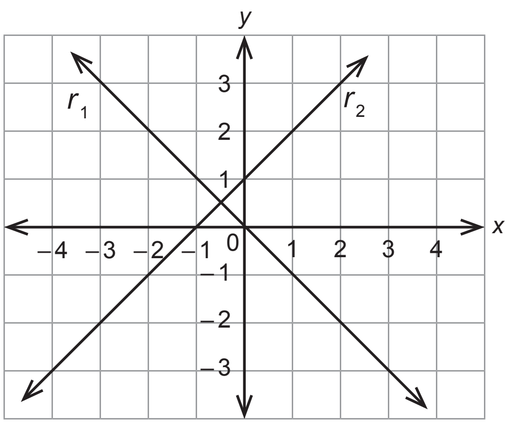
$m_1 = \frac{2}{1} = 2$ $m_2 = \frac{1}{2}$

paralelas   no paralelas

b) 

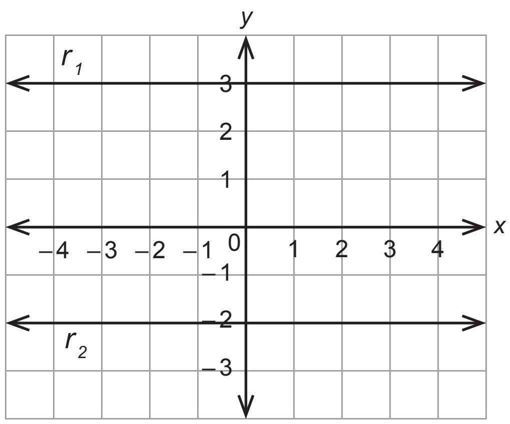
$m_1 =$ —— $m_2 =$ ——

paralelas   no paralelas

c) 

$m_1 =$ —— $m_2 =$ ——

paralelas   no paralelas

d) 

$m_1 =$ —— $m_2 =$ ——

paralelas   no paralelas

ESP_2ESO-2_LA_XILE_p136-155.indd 153   10/2/20 22:52

RECUERDA: Si dos rectas son paralelas, tienen la misma pendiente y no se intersecan.
Si dos rectas no son paralelas, tienen diferente pendiente y se intersecan.

3. Anota la pendiente de cada recta. Indica si son paralelas y si hay intersección.

a) $y = 2x - 1$ $m =$ ______
$y = 3x - 1$ $m =$ ______
¿Paralelas? sí no
¿Intersección? sí no

b) $y = 3x - 1$ $m =$ ______
$y = 3x + 5$ $m =$ ______
¿Paralelas? sí no
¿Intersección? sí no

c) $y = -x + 3$ $m =$ ______
$y = -x - 7$ $m =$ ______
¿Paralelas? sí no
¿Intersección? sí no

d) $y = 6$ $m =$ ______
$y = -3$ $m =$ ______
¿Paralelas? sí no
¿Intersección? sí no

RECUERDA: La solución de un sistema de ecuaciones lineales es el punto de intersección de las rectas.

4. Usa las pendientes para deducir si el sistema de ecuaciones tiene solución.

a) $y = 4x - 2$ $m =$ ______
$y = -2x + 6$ $m =$ ______
¿Solución? sí no

b) $y = x + 5$ $m =$ ______
$y = x - 2$ $m =$ ______
¿Solución? sí no

c) $y = 7$ $m =$ ______
$y = -2$ $m =$ ______
¿Solución? sí no

d) $y = 5x + 7$ $m =$ ______
$y = -2x$ $m =$ ______
¿Solución? sí no

5. Resuelve algebraicamente en el ejercicio 4 las que tengan solución.

6. Plantea la ecuación de cada recta en la forma $y = mx + b$. Después, deduce si el sistema de ecuaciones tiene solución.

a) $x + y = 7 \longrightarrow$ $y = -x + 7$ $m =$ -1 ¿Paralelas? sí no

$x - y = 2 \longrightarrow$ $y = x - 2$ $m =$ 1 ¿Solución? sí no

b) $x - y = 5 \longrightarrow$ ________ $m =$ ____ ¿Paralelas? sí no

$x - y = 2 \longrightarrow$ ________ $m =$ ____ ¿Solución? sí no

c) $2x - y = 8 \longrightarrow$ ________ $m =$ ____ ¿Paralelas? sí no

$3x + y = 4 \longrightarrow$ ________ $m =$ ____ ¿Solución? sí no

d) $3x + y = 1 \longrightarrow$ ________ $m =$ ____ ¿Paralelas? sí no

$3x + y = 7 \longrightarrow$ ________ $m =$ ____ ¿Solución? sí no

e) $-3x + y = 1 \longrightarrow$ ________ $m =$ ____ ¿Paralelas? sí no

$3x + y = 7 \longrightarrow$ ________ $m =$ ____ ¿Solución? sí no

Una variable representa solo un número cada vez. Por ejemplo, la variable x no puede representar dos números al mismo tiempo.

El sistema de ecuaciones lineales $\begin{matrix} x = 6 \\ x = 7 \end{matrix}$ no tiene solución, porque x no puede ser 6 y 7 a la vez.

Del mismo modo, el sistema $\begin{matrix} x + 2y = 6 \\ x + 2y = 7 \end{matrix}$ no tiene solución, porque $x + 2y$ no puede ser 6 y 7 a la vez.

7. Sin encontrar la pendiente, rodea los sistemas que no tienen solución.

A. $3x - 2y = 4$
$3x - 2y = 5$

B. $2x + 3y = -2$
$2x - 3y = 4$

C. $3x - 2y = 4$
$2x - 3y = -1$

D. $x - 4y = 1$
$x - 5y = -2$

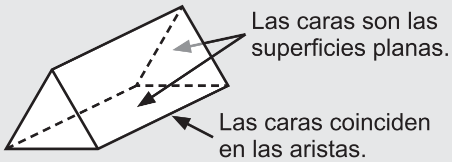
E. $4x + 3y = 9$
$4x + 3y = 0$

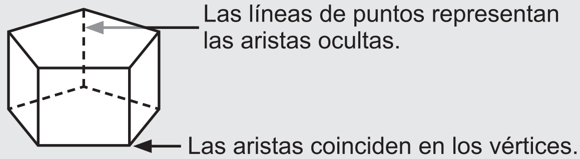
F. $2x - y = 4$
$2x + y = -6$

8. Elvira cree que el sistema $\begin{matrix} 3x - 2y = 2 \\ -3x + 2y = 4 \end{matrix}$ no tienen solución. ¿Tiene razón? Justifica tu respuesta.

G8-49 Volumen de los prismas

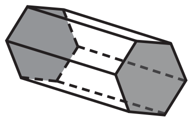
Los **prismas** son figuras en 3D que tienen caras, aristas, vértices y bases.



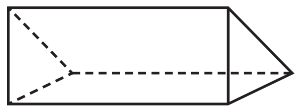


Todos los prismas tienen dos caras paralelas que son las bases. Las bases siempre son polígonos congruentes.

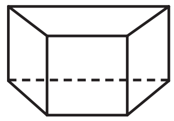
1. a) Sombrea las dos bases de los prismas. Identifica el tipo de polígono que forma la base.

i) 

hexágono

ii) 

____

iii) 

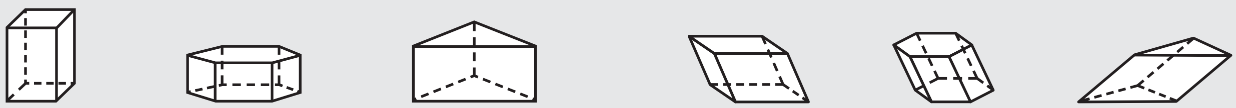
____

b) ¿Qué figuras son las caras que no son bases? ___________________

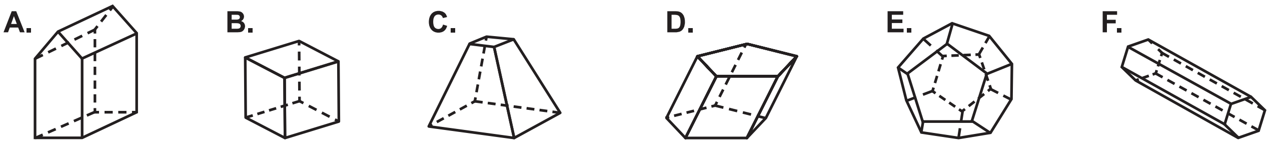
Cuando un prisma se apoya sobre una base, la otra base pasa a ser la cara superior.

En un **prisma recto**, la cara superior está justo encima de la cara inferior. Las aristas laterales son verticales.

En un **prisma oblicuo**, la cara superior no está justo encima de la cara inferior. Las aristas laterales no son verticales.



2. a) Clasifica las figuras en 3D.

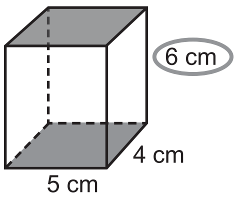


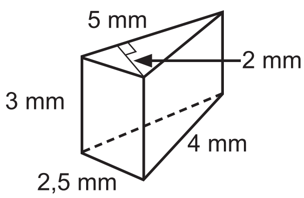
Prismas rectos ____________ Prismas oblicuos ____________ No son prismas ____________

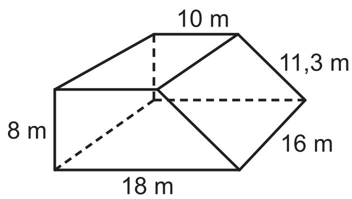
b) Escoge una figura en 3D del último grupo y justifica por qué no es un prisma.

La altura de un prisma es la distancia entre las dos bases.

3. Rodea con un círculo las medidas que indican la altura de los prismas. Pista: Sombrea las dos bases.

a) 

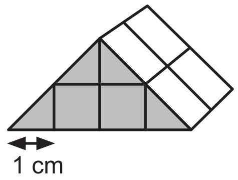
b) 

c) 

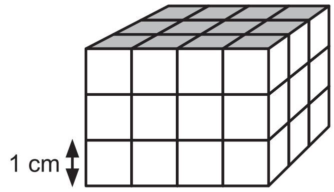
ESP_2ESO-2_LA_XILE_p156-175.indd 156 10/2/20 22:53

El **volumen** es el espacio que ocupa una figura en 3D. El volumen se mide en cubos unitarios o unidades cúbicas. Por ejemplo, centímetros cúbicos (cm^3) y pulgadas cúbicas (in^3).

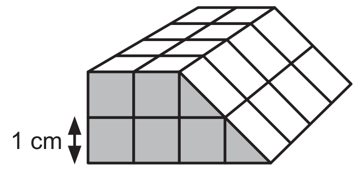
4. a) Cuenta los cubos para determinar el volumen de los prismas.

i) 

$V =$ *8 cm³*

ii) 

$V =$ ________

iii) 

$V =$ ________

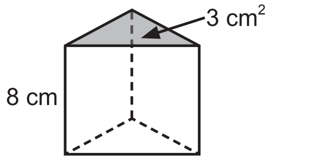
b) Completa la tabla para cada prisma de *a*).

	Área base sombreada (cm^2)	**Altura (cm)**	**Área base sombreada × altura (cm^3)**
i)	*4 cm²*	*2 cm*	*8 cm³*
ii)			
iii)			

c) ¿Qué observas sobre el volumen de los prismas de *a*) y el producto (área base sombreada) × (altura) del ejercicio anterior?

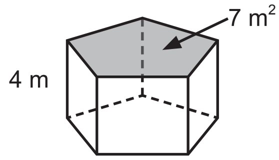
d) Escribe la fórmula del volumen de un prisma.

5. Usa la fórmula del ejercicio 4 para encontrar el volumen de los prismas.

a) 

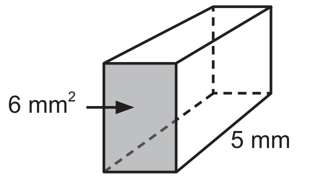
$V = (3\ cm^2)(8\ cm) =$

$= 24\ cm^3$

b) 

$V =$ ________ $=$

$=$ ________

c) 

$V =$ ________ $=$

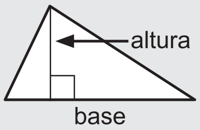
$=$ ________

6. El volumen de un prisma es de 600 cm^3 y su altura, 15 centímetros. ¿Cuál es el área de la base del prisma?

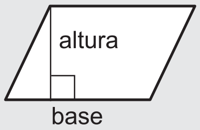
7. El volumen de un prisma rectangular es de 48 cm^3 y su altura, 3 cm. Indica 3 posibles dimensiones (largo y ancho) de la base.

Área rectángulo = = largo × ancho

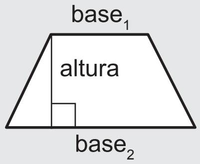
Área triángulo = = base × altura : 2



Área paralelogramo = = base × altura

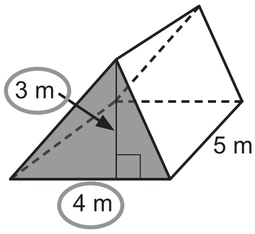


Área trapecio = = ($base_1$ + $base_2$) × altura : 2



8. Calcula el área de la base (B). Pista: Primero, sombrea la base y rodea con un círculo sus medidas.

a)

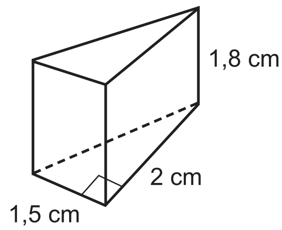


$B =$ *(base × altura) : 2* =

= *(4 m)(3 m) : 2* =

= *6 m²*

b)

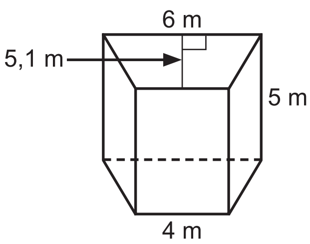


$B =$ ______________ =

= ______________ =

= ______________

c)

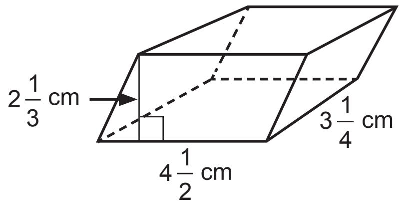


$B =$ ______________ =

= ______________ =

= ______________

d)



$B =$ ______________ =

= ______________ =

= ______________

Volumen de un prisma = área base × altura o $V = B \times h$ o $V = Bh$

9. Encuentra el volumen de los prismas del ejercicio 8.

a) $V =$ *Bh* =

= *(6 m²)(5 m)* =

= *30 m³*

b) $V =$ __________ =

= __________ =

= __________

c) $V =$ __________ =

= __________ =

= __________

d) $V =$ __________ =

= __________ =

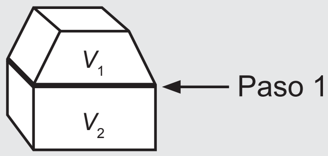
= __________

ESP_2ESO-2_LA_XILE_p156-175.indd 158 10/2/20 22:53

Un **cuerpo geométrico compuesto** es una figura en 3D formada por dos o más figuras más simples.

Para encontrar el volumen de un cuerpo geométrico compuesto:

Paso 1: Dividimos el cuerpo geométrico en figuras cuyos volúmenes sepamos calcular.

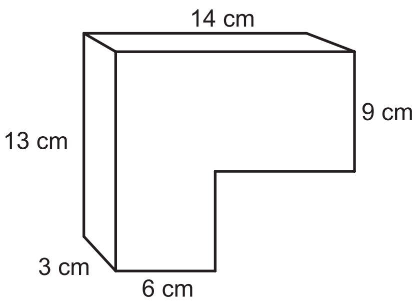


Paso 2: Encontramos el volumen de cada figura simple.

Paso 3: Sumamos los volúmenes.

10. Encuentra el volumen de los cuerpos geométricos compuestos.

a)

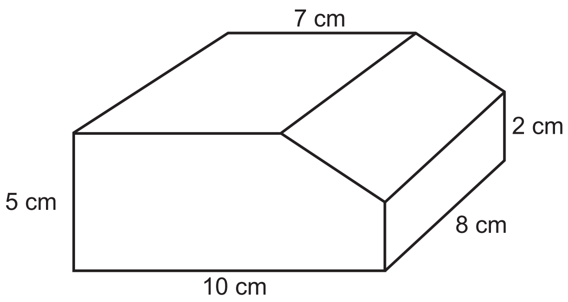


$V_1 =$ ______________________

$V_2 =$ ______________________

Volumen total $=$ ________________

b)



$V_1 =$ ______________________

$V_2 =$ ______________________

Volumen total $=$ ________________

11. Un prisma rectangular tiene las siguientes dimensiones: altura $\frac{3}{4}$ m, largo $\frac{5}{6}$ m, volumen $\frac{5}{16}$ m^3. ¿Cuánto mide de ancho?

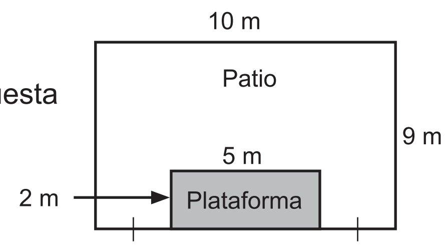
12. Escribe dos posibles conjuntos de dimensiones (largo, ancho y alto) que correspondan a un prisma rectangular del volumen indicado.

a) $V = 12$ mm^3 b) $V = 8$ cm^3 c) $V = \frac{1}{2}$ dm^3 d) $V = 0{,}75$ m^3

13. a) Boris quiere cubrir su patio con 10 cm de tierra vegetal. ¿Cuántos metros cúbicos de tierra vegetal necesita? Pista: 1 cm $= \frac{1}{100}$ m.

b) 4 metros cúbicos de tierra vegetal cuestan $1.490. ¿Cuánto le cuesta a Boris la cantidad de tierra vegetal que necesita?

Extra ▶ ¿Cuánto más le costaría a Boris cubrir el patio con 15 cm de tierra vegetal?

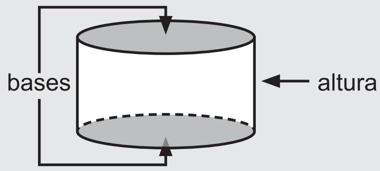


G8-50 Volumen del cilindro

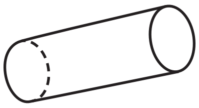
Los **cilindros** son figuras en 3D que tienen:

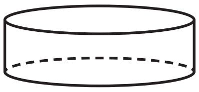
- Dos bases paralelas que son círculos congruentes.
- Una superficie curvada.

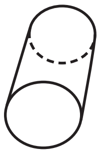
La altura de un cilindro es la distancia entre las bases.



1. Sombrea la base visible de los cilindros.

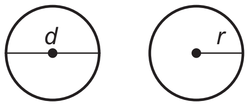
a) 

b) 

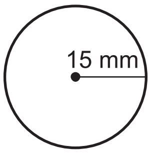
c) 

RECUERDA: El diámetro de un círculo es dos veces su radio: $d = 2r$

El radio de un círculo es la mitad de su diámetro: $r = \frac{1}{2}d$

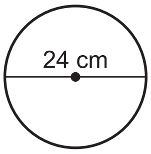


2. ¿Qué se indica, el radio o el diámetro? Encuentra la medida que falta.

a) 

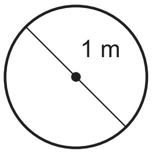
$r =$ ______ mm

$d =$ ______ mm

b) 

$r =$ ______ cm

$d =$ ______ cm

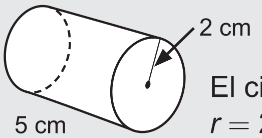
Extra ▶ 

$r =$ ______ m

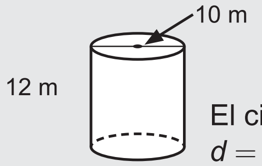
$d =$ ______ m

Podemos describir un cilindro indicando las siguientes dimensiones: altura (h) del cilindro y radio (r) o diámetro (d) de la base.

Ejemplos:

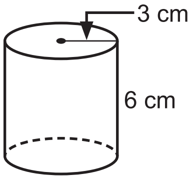


El cilindro tiene
$r = 2$ cm y $h = 5$ cm.



El cilindro tiene
$d = 10$ m y $h = 12$ m.

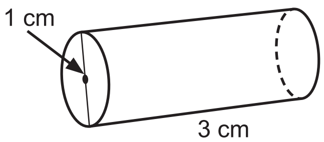
3. Determina las dimensiones de los cilindros.

a) 

$r =$ ____________

$d =$ ____________

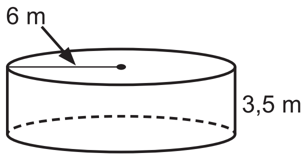
$h =$ ____________

b) 

$r =$ ____________

$d =$ ____________

$h =$ ____________

c) 

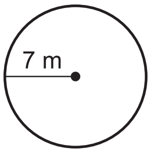
$r =$ ____________

$d =$ ____________

$h =$ ____________

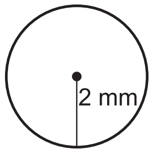
RECUERDA: El área A de un círculo de radio r es $A = \pi r^2$. Usa 3,14 como valor de π.

4. Encuentra el área del círculo con el radio dado. Redondea las décimas.

a) 

$A \approx$ *(3,14)(7)²* $\approx$

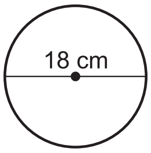
$\approx$ *153,9 m²*

b) 

$A \approx$ ________ $\approx$

$\approx$ ________

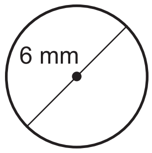
5. Encuentra el radio de los círculos. después, calcula el área. Redondea a las décimas.

a) 

$r =$ ________

$A \approx$ ________ $\approx$

$\approx$ ________

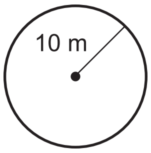
b) 

$r =$ ________

$A \approx$ ________ $\approx$

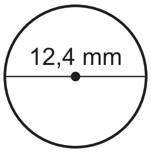
$\approx$ ________

6. Encuentra el área de los círculos. Redondea a las décimas. Pista: ¿Se indica el radio o el diámetro?

a) 

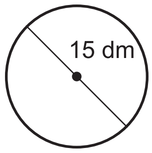
$A \approx$ ________ $\approx$

$\approx$ ________

b) 

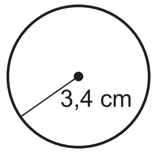
$A \approx$ ________ $\approx$

$\approx$ ________

c) 

$A \approx$ ________ $\approx$

$\approx$ ________

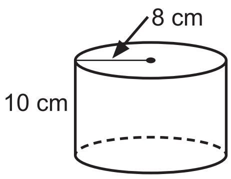
d) 

$A \approx$ ________ $\approx$

$\approx$ ________

Los cilindros y los prismas son similares. El volumen de un cilindro = área de la base × altura o $V = Bh$.
Como el área de un círculo $= \pi r^2$, el volumen de un cilindro $= \pi r^2 h$.

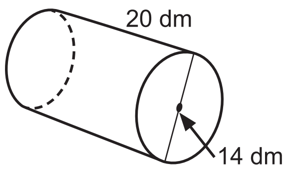
7. Encuentra el volumen de los cilindros. Redondea a las décimas.

a) 

$V =$ $\pi r^2 h$ $\approx$

$\approx$ *3,14(8)²(10)* $=$

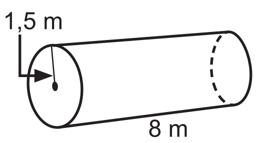
$=$ *2.009,6 cm³*

b) 

$V =$ ________ $\approx$

$\approx$ ________ $=$

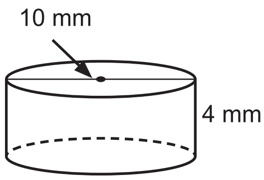
$=$ ________

c) 

$V =$ ________ $\approx$

$\approx$ ________ $\approx$

$\approx$ ________

d) 

$V =$ ________ $\approx$

$\approx$ ________ $=$

$=$ ________

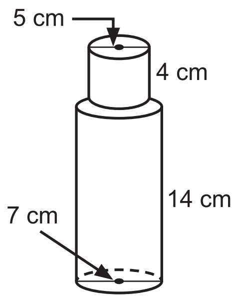
Extra ▶ El cilindro A tiene un radio de 5 cm y una altura de 8 cm. El cilindro B tiene un radio de 10 cm y una altura de 8 cm. Escribe la razón volumen A : volumen B. Simplifica el resultado.

8. Dos latas de tomate tienen diferentes tamaños. La lata A tiene un diámetro de 7 cm y una altura de 12 cm. La lata B tiene un diámetro de 10 cm y una altura de 7 cm.

a) Encuentra el volumen de cada lata redondeando a las centésimas. ¿En cuál cabe más sopa?

b) Si la lata A cuesta \$1.980 y la lata B cuesta \$2.290, ¿cuál cuesta menos por cm^3?

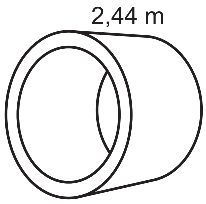
9. a) La botella de agua de la imagen está completamente llena. Encuentra el volumen de la botella, redondeando a las décimas.



b) 1 gramo de naranjada en polvo se mezcla con 250 cm^3 de agua. ¿Cuántos gramos de naranjada en polvo hay que añadir a la botella de agua si está completamente llena? Redondea el resultado a las décimas.

c) Cada gramo de naranjada en polvo tiene 4 kilocalorías. ¿Cuántas kilocalorías tiene la bebida del ejercicio anterior?

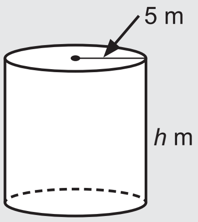
10. a) Una tubería de cemento es un cilindro grande con un hueco central en forma de cilindro más pequeño. El diámetro exterior de la tubería mide 254 cm y el diámetro del hueco mide 210 cm. Calcula el volumen en m^3 necesario para construir la tubería. Redondea el resultado a las décimas.



b) Un metro cúbico de cemento pesa aproximadamente 2.406 kg. ¿Cuánto pesa en kilogramos la tubería? Redondea el resultado a las unidades.

Conociendo el volumen (V) y el radio (r) de la base, se puede encontrar la altura (h) de un cilindro.

Ejemplo:



$V = 785\ m^3$

$$V = \pi r^2 h$$
$$785 \approx (3{,}14)(5)^2 h$$
$$785 \approx 78{,}5h$$
$$785 : 78{,}5 \approx h$$
$$10 \approx h$$

El prisma tiene una altura de aproximadamente 10 m.

11. Un cilindro tiene un volumen aproximado de 1.962,5 mm^3 y una altura de 25 mm. Plantea una ecuación y resuélvela para encontrar el área de la base.

12. Un cilindro tiene un volumen aproximado de 6.805,95 cm^3 y un radio de 8,5 cm. Plantea una ecuación y resuélvela para encontrar la altura.

13. Un depósito de agua cilíndrico tiene un volumen aproximado de 15 m^3 y un diámetro de 2,5 m. El cobertizo de Gloria mide 2,7 m de alto. ¿Cabe el depósito en el cobertizo?

Extra ▶ Escribe una fórmula simplificada para el volumen de un cilindro, usando el diámetro de la base en lugar del radio.

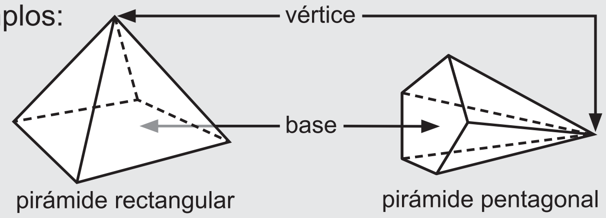
G8-51 Pirámides

Las **pirámides** son figuras 3D que tienen:

- Una base que es un polígono.
- Caras laterales que son triángulos.
- Un **vértice** (donde coinciden todas las caras laterales).

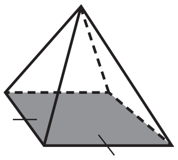
La denominación de las pirámides depende de la forma de la base.

Ejemplos:



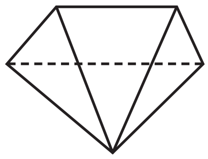
1. Sombrea la base de las pirámides. Identifica el polígono que forma la base.

a)



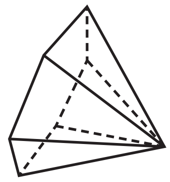
cuadrado

b)



____

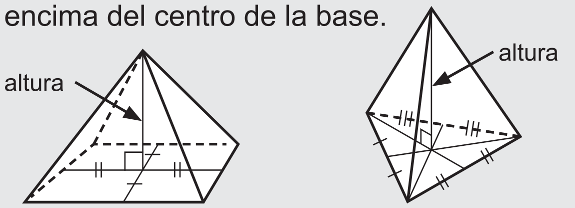
c)



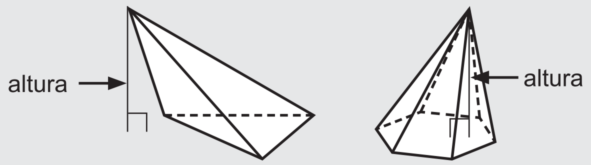
____

Cuando una pirámide se apoya sobre la base, su altura es la distancia vertical desde el vértice hasta la base.

En una **pirámide recta**, el vértice está justo encima del centro de la base.

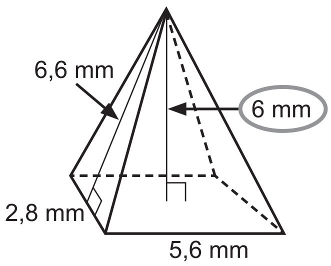


En una **pirámide oblicua**, el vértice no está justo encima del centro de la base.

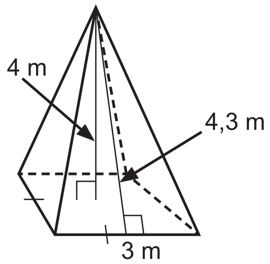


2. Rodea con un círculo las medidas que indican la altura de las pirámides.

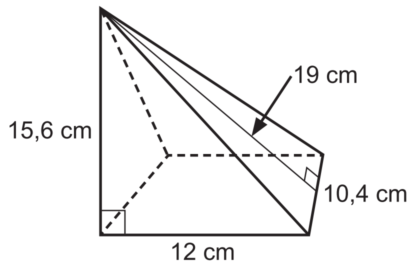
a)



b)

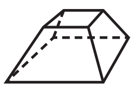


c)

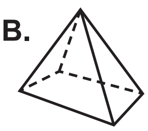


3. a) Clasifica las figuras 3D.

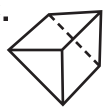
A.



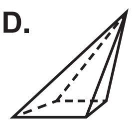
B.



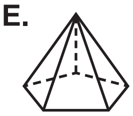
C.



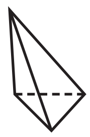
D.



E.



F.

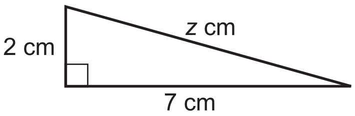


Pirámides rectas __________ Pirámides oblicuas __________ No son pirámides __________

b) Escoge una figura 3D del último grupo y justifica por qué no es una pirámide.

RECUERDA: Podemos usar el teorema de Pitágoras para encontrar....

la hipotenusa de un triángulo rectángulo.



$z^2 = 2^2 + 7^2$

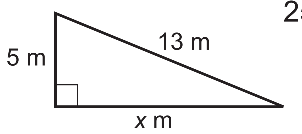
$z^2 = 4 + 49$

$z^2 = 53$

$z = \sqrt{53}$

$z \approx 7{,}3$ cm

el cateto de un triángulo rectángulo.



$5^2 + x^2 = 13^2$

$25 + x^2 = 169$

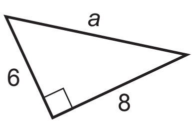
$x^2 = 169 - 25$

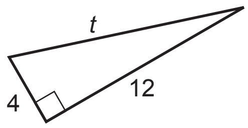
$x^2 = 144$

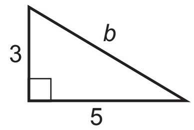
$x = \sqrt{144}$

$x = 12$ m

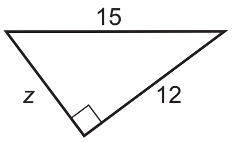
4. Encuentra la hipotenusa. Redondea a las décimas. Todas las medidas están en cm.

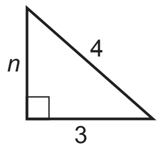
a) 

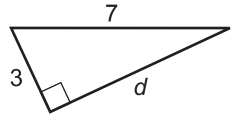
b) 

c) 

5. Encuentra el cateto desconocido. Redondea a las décimas. Todas las medidas están en metros.

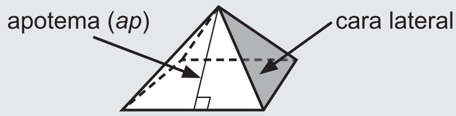
a) 

b) 

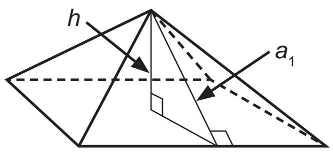
c) 

Las caras triangulares de una pirámide se denominan **caras laterales**.

La altura de una cara lateral se denomina **altura lateral** o **apotema** (*ap*).

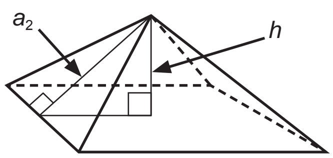


6. a) Dibuja el triángulo que se forma en el interior de la pirámide.

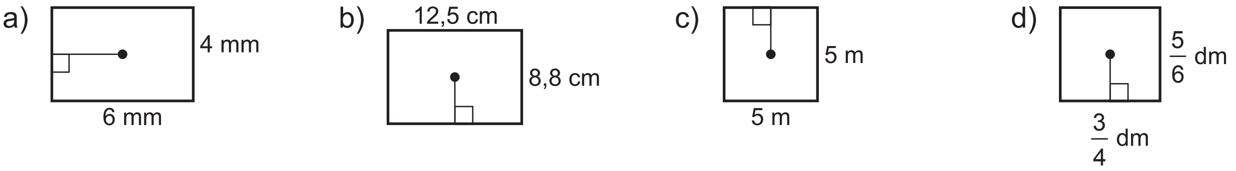


b) Usa el dibujo para justificar por qué la apotema es siempre mayor que la altura de la pirámide.

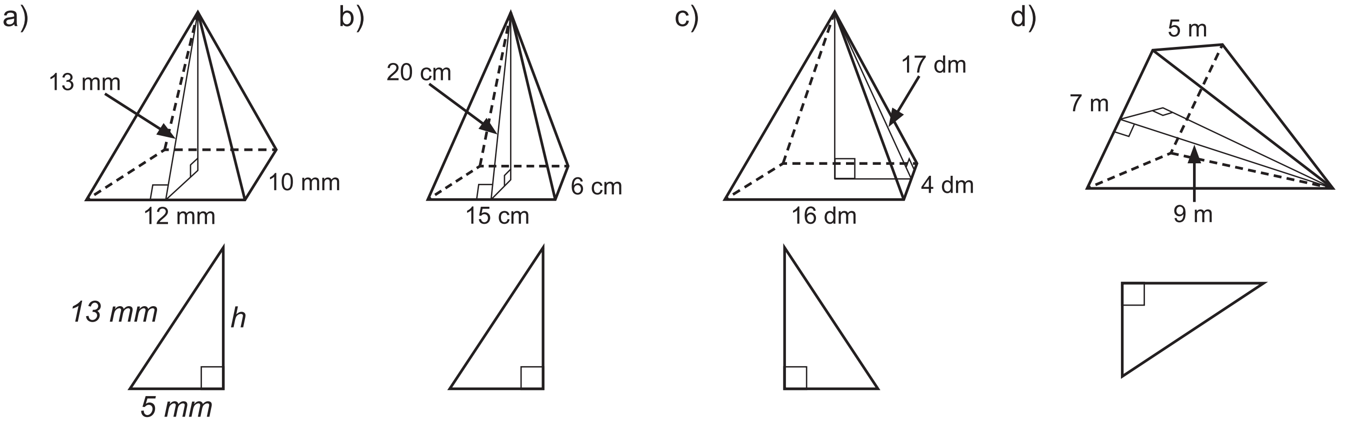
Extra ▶ En el interior de la misma pirámide se forma un triángulo distinto al que has dibujado en *a*). Compara los triángulos. ¿Qué medida o medidas son iguales y cuáles son diferentes? Justifica tu respuesta.



7. Indica la longitud de los segmentos trazados desde el centro de los rectángulos.

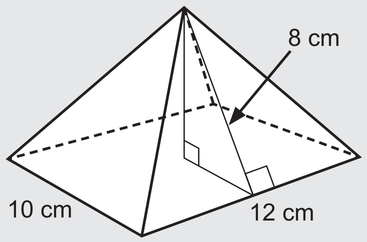


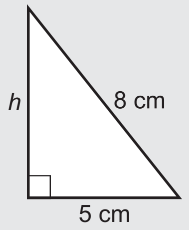
8. Indica la longitud de los catetos de los triángulos rectángulos dibujados dentro de las pirámides.



Si conocemos la apotema de una pirámide recta, podemos usar el teorema de Pitágoras para encontrar la altura de la pirámide.

Ejemplo:



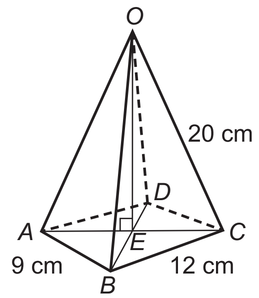


$$5^2 + h^2 = 8^2$$
$$25 + h^2 = 64$$
$$h^2 = 64 - 25$$
$$h^2 = 39$$
$$h = \sqrt{39}$$
$$h \approx 6{,}2$$

La altura de la pirámide es de unos 6,2 cm.

9. Usa el teorema de Pitágoras para encontrar la altura de las pirámides del ejercicio 8. Redondea los resultados a las décimas.

10. La apotema de una pirámide recta de base cuadrada de 14 cm mide 12 cm. ¿Cuál es la altura de la pirámide? Redondea a las décimas.



11. La pirámide del dibujo es una pirámide rectangular recta con una altura *OE*.

a) Dibuja el triángulo *ABC*. Encuentra la longitud de *AC*.

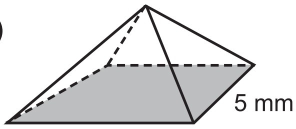
b) ¿Cuál es la longitud de *EC*?

c) Encuentra la altura (*OE*) de la pirámide, redondea a las décimas.

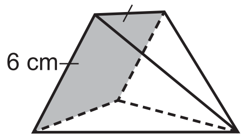
Extra ▶ Encuentra la apotema de la cara *OBC*. Pista: *OBC* es un triángulo isósceles.

G8-52 Volumen de las pirámides

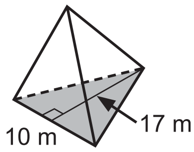
1. La base de las siguientes pirámides rectas está sombreada. Encuentra el área de la base (*B*).

a) 

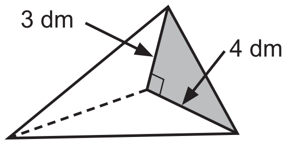
$B =$ ___________

b) 

$B =$ ___________

c) 

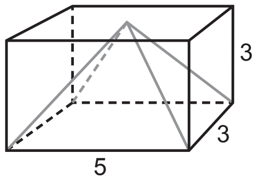
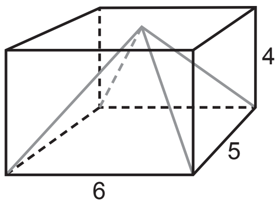
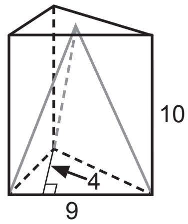
$B =$ ___________

d) 

$B =$ ___________

2. Las siguientes pirámides tienen la misma base y altura que los prismas.

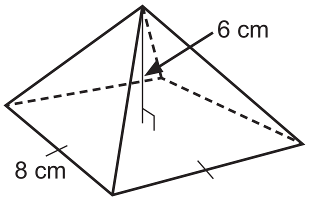
a) Completa la tabla. Todas las medidas están en centímetros.

	i) 	ii) 	iii) 
Área de la base			
Altura			
Volumen del prisma			
Volumen de la pirámide	15 cm^3	40 cm^3	60 cm^3

b) Compara los volúmenes del prisma y la pirámide con la misma base y altura. ¿Qué patrón observas?

c) Escribe una fórmula para el volumen de una pirámide usando el área de la base y la altura de la pirámide.

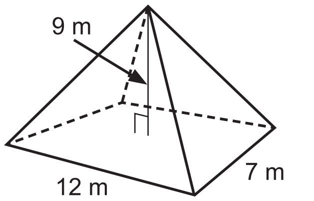
3. Usa la fórmula desarrollada en el ejercicio 2 para encontrar el volumen de las siguientes pirámides.

a) 

$V =$ ______________________ $=$

$=$ ______________________ $=$

$=$ ______________________

b) 

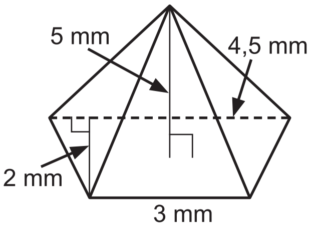
$V =$ ______________________ $=$

$=$ ______________________ $=$

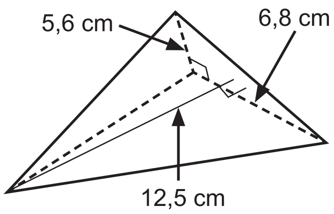
$=$ ______________________

4. Encuentra el volumen de las siguientes pirámides. Redondea a las décimas.

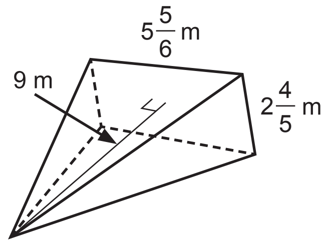
a)



b)



c)



5. a) Encuentra el volumen de una pirámide rectangular con...

i) una base de 3 m por 4 m y una altura de 5 m.

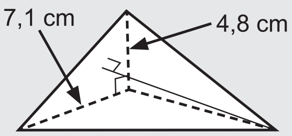
ii) una base de 6 m por 8 m y una altura de 10 m.

b) Cuando duplicas todas las dimensiones de una pirámide rectangular, ¿cómo cambia el volumen? Justifica tu respuesta.

Dados el volumen (V) y las dimensiones de la base, podemos encontrar la altura (h) de una pirámide.

Ejemplo:

$V \approx 71{,}6 \text{ cm}^3$



Área de la base: $B = (7{,}1)(4{,}8) : 2 = 17{,}04$

Altura de la pirámide: $h = ?$

$V = Bh : 3$

$71{,}6 \approx (17{,}04)h : 3$

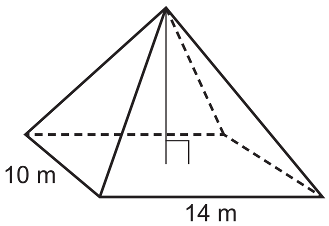
$71{,}6 \times 3 : 17{,}04 \approx h$

$12{,}6 \approx h$

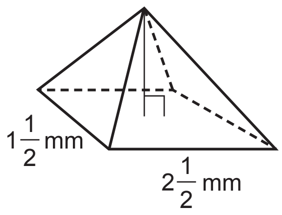
La altura de la pirámide mide unos 12,6 cm.

6. Formula y resuelve una ecuación para encontrar la altura de las pirámides.

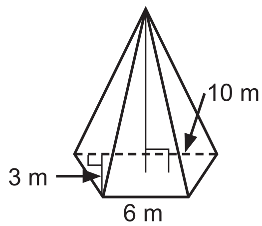
a) $V = 420 \text{ m}^3$



b) $V = 1\frac{9}{16}$ mm



c) $V = 96 \text{ m}^3$

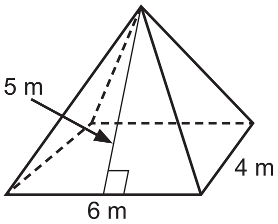


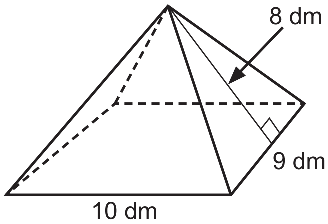
7. a) Calcula el volumen de un cubo con longitud de la arista de 10 cm.

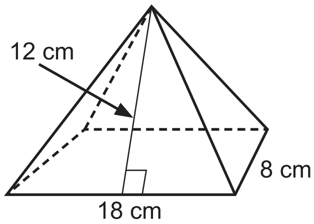
b) Una pirámide de base cuadrada tiene la misma base y el mismo volumen que el cubo de *a*). ¿Cuál es su altura? Pista: Compara las fórmulas.

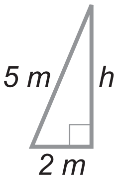
Extra ▶ Dibuja el cubo y la pirámide.

8. Usa el teorema de Pitágoras para encontrar la altura de las siguientes pirámides rectangulares rectas,. redondeando a las décimas. Después, calcula el volumen.

a) 

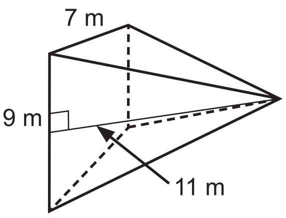
b) 

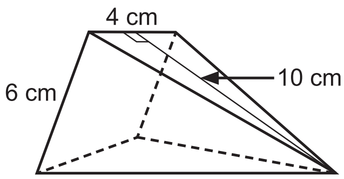
c) 

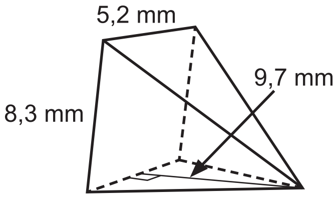


$$2^2 + h^2 = 5^2$$
$$4 + h^2 = 25$$
$$h^2 = 25 - 4$$
$$h^2 = 21$$
$$h = \sqrt{21}$$
$$h \approx 4{,}6 \text{ m}$$

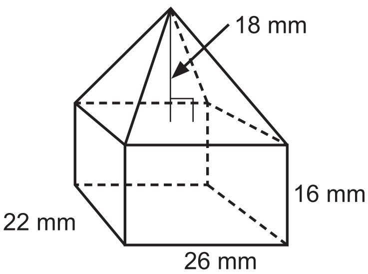
$$V = Bh : 3 \approx$$
$$\approx (6)(4)(4{,}6) : 3 =$$
$$= 36{,}8 \text{ m}^3$$

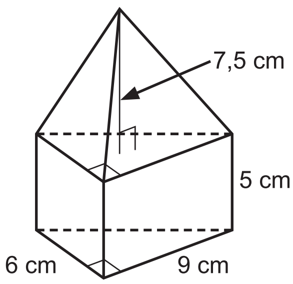
d) 

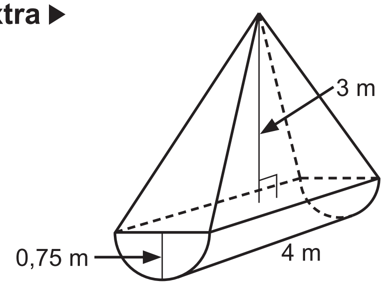
e) 

f) 

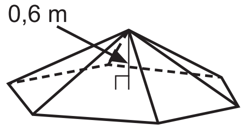
9. Encuentra el volumen de los siguientes cuerpos geométricos compuestos. pista: Divide el cuerpo en figuras más simples.

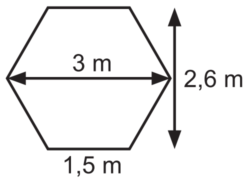
a) 

b) 

Extra ▶ 

10. La sombrilla de la terraza de un bar, cuando está totalmente, abierta tiene forma de pirámide hexagonal. La base se muestra en el dibujo de la derecha. Por dentro, la sombrilla tiene una altura de 0,6 m. Redondeando al segundo decimal, ¿qué volumen de aire hay en el interior de la sombrilla?





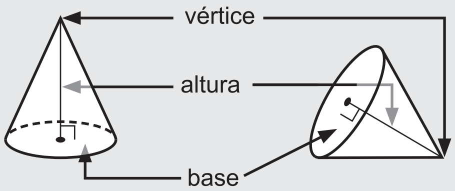
11. Una mina abierta de oro y cobre tiene forma de pirámide invertida. La mina tiene una abertura de 1,2 kilómetros cuadrados y la apotema mide 768 metros. Redondeando a las unidades, ¿cuál es la profundidad en metros de la mina?

G8-53 Volumen del cono

Los **conos** son figuras 3D que tienen:

- Una base que es un círculo.
- Una superficie lateral curvada.
- Un vértice.

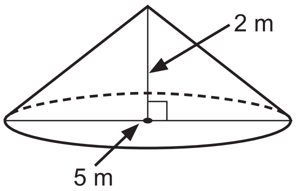
Ejemplos:



El vértice de un **cono recto** apoyado sobre su base está justo encima del centro de la base.

1. Identifica el radio (r), el diámetro (d) y la altura (h) de los siguientes conos.

a)

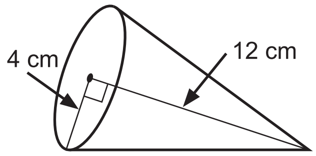


$r =$ *2,5 m*

$d =$ *5 m*

$h =$ *2 m*

b)

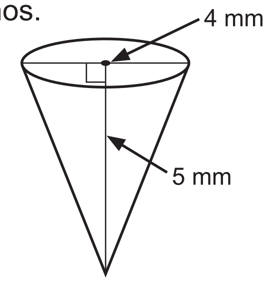


$r =$ ____________

$d =$ ____________

$h =$ ____________

c)



$r =$ ____________

$d =$ ____________

$h =$ ____________

2. Para cada cono del ejercicio 1, encuentra el área de la base. Redondea a las décimas.
Pista: Área de un círculo $= \pi r^2$. Usa 3,14 como valor de π.

a) $A \approx$ __________________ $\approx$ __________________

b) $A \approx$ __________________ $\approx$ __________________

c) $A \approx$ __________________ $\approx$ __________________

Los conos y las pirámides son similares. El volumen de un cono $= \frac{1}{3} \times$ área de la base $\times$ altura o $V = \frac{1}{3}Bh$.

Como el área de un círculo $= \pi r^2$, el volumen de un cono $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

3. Sustituye las variables en $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ por las dimensiones indicadas y calcula. Redondea a las décimas.

a) $r = 5$ cm, $h = 9$ cm

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \approx$

$\approx \frac{1}{3}(3{,}14)(5)^2(9) =$

$= \frac{1}{3}(3{,}14)(25)(9) =$

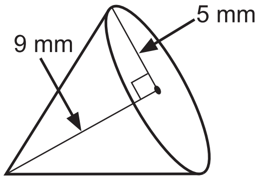
$= 235{,}5 \text{ cm}^3$

b) $r = 1$ mm, $h = 12$ mm

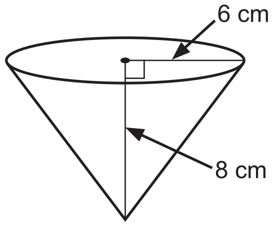
c) $d = 4$ m, $h = 6$ m

4. Encuentra el volumen de un cono con las dimensiones indicadas. Redondea a las décimas.

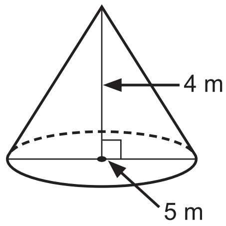
a)



b)



c)



d) $r = 3$ dm, $h = 5$ dm

e) $d = 2{,}2$ dm, $h = 7{,}4$ dm

f) $d = 2{,}9$ m, $h = 6$ m

5. a) En una granja, los niños pueden comprar cucuruchos de pelets para alimentar a las cabras y las ovejas. Los cucuruchos son conos de 10 cm de diámetro y 15 cm de altura. ¿Cuál es su volumen?

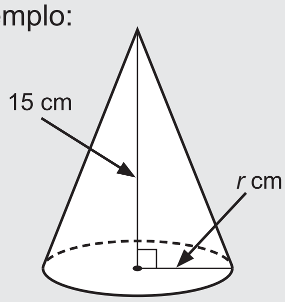
b) Para rellenar los cucuruchos, el granjero usa un saco que contiene 50.000 cm^3 de pelet. ¿Cuántos cucuruchos puede rellenar?

c) El granjero llena cucuruchos con el pelet de un saco y vende todos los cucuruchos llenos a \$1.000 cada uno. El saco cuesta \$12.000. ¿Cuánto dinero gana el granjero?

6. Para derretir la nieve de una autopista, los operarios forman una pila de sal en forma de cono. El cono tiene un diámetro de 10 metros y una altura de 4 metros. Si la sal pesa 36 kg por metro cúbico, ¿cuál es el peso total de la sal apilada?

Dados el volumen (V) y la altura (h) de un cono, podemos calcular el radio (r) de la base.

Ejemplo:



$V \approx 565{,}2$ cm^3

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$565{,}2 \approx \frac{1}{3}(3{,}14)r^2(15)$$
$$565{,}2 \approx 15{,}7r^2$$
$$565{,}2 : 15{,}7 \approx r^2$$
$$36 \approx r^2$$
$$\sqrt{36} \approx r$$
$$6 \approx r$$

El radio de la base mide unos 6 cm.

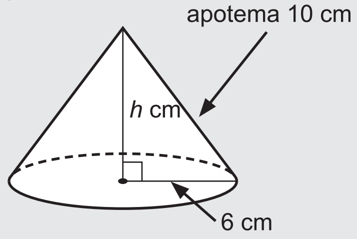
7. Un cono con un radio de 4 cm tiene un volumen de 177,2 cm^3. Plantea y resuelve una ecuación para encontrar la altura del cono, redondeando a las décimas.

8. Un cono tiene una altura de 9 cm y un volumen de 84,78 cm^3. Plantea y resuelve una ecuación para encontrar el radio, redondeando a las décimas.

9. Un cono tiene una altura de 7,9 m y un volumen de 152,9 m^3. Plantea y resuelve una ecuación para encontrar el diámétro, redondeando a las décimas.

Dados la apotema y el radio de un cono recto, podemos calcular la altura del cono usando el teorema de Pitágoras.

Ejemplo:

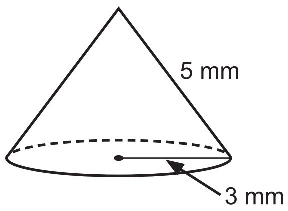


$$6^2 + h^2 = 10^2$$
$$36 + h^2 = 100$$
$$h^2 = 100 - 36$$
$$h^2 = 64$$
$$h = \sqrt{64}$$
$$h = 8$$

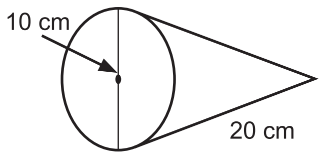
La altura del cono es de 8 cm.

10. Usa el teorema de Pitágoras para encontrar la altura de los siguientes conos. Redondea a las décimas.

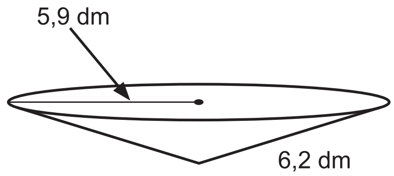
a)



b)



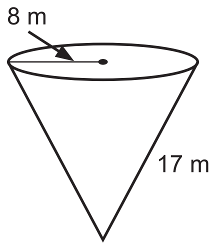
c)



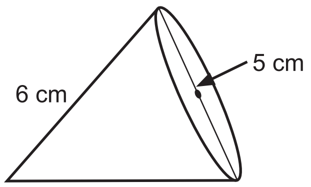
11. El volcán Mayón de Filipinas tiene forma de cono. Su base tiene un diámetro de 20 km y la distancia desde la base hasta el vértice, siguiendo el lado curvado, es de 10,3 km. Encuentra la altura del volcán.

12. Encuentra la altura de un cono con las dimensiones indicadas. Después, calcula el volúmen. Redondea a las décimas.

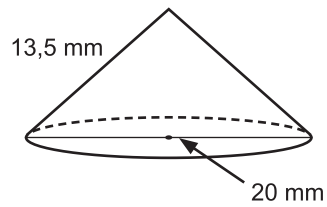
a)



b)



c)



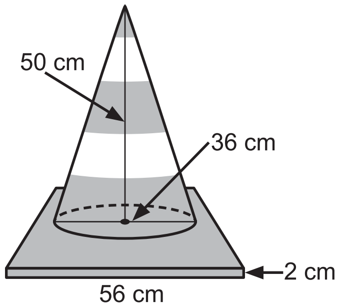
d) radio = 7 cm
apotema = 25 cm

e) radio = 13 m
apotema = 27 m

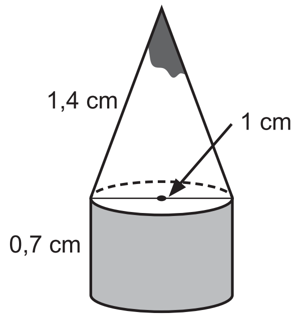
f) diámetro = 7,2 dm
apotema = 8,3 dm

13. Encuentra el volumen de los siguientes cuerpos geométricos compuestos.

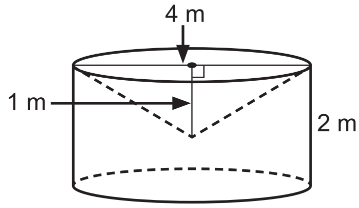
a)



b)



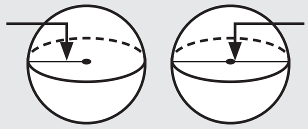
Extra ▶ El cono se extrae del cilindro.



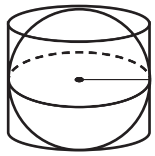
G8-54 Volumen de la esfera

Una **esfera** es una figura 3D en la que todos los puntos de la superficie están a la misma distancia del centro.

Podemos describir una esfera indicando su radio (r) o su diámetro (d).



1. Una esfera con un radio de 1 cm encaja exactamente dentro de un cilindro con un radio de 1 cm, tal y como se muestra en el dibujo de la derecha.



a) ¿Cuál es la altura del cilindro? ___________

b) ¿Cuál es el volumen del cilindro? Escribe el símbolo π en lugar de 3,14.

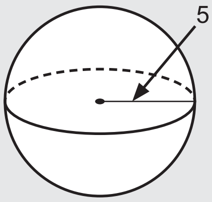
c) ¿El volumen de la esfera es mayor o menor que el volumen del cilindro?

d) Usa el resultado de *b*) para escribir una expresión con $<$ o $>$ aplicable al volumen de una esfera.

e) El volumen de esta esfera es $\frac{4}{3}\pi$. ¿Concuerda con la respuesta de *d*)? Justifica tu respuesta.

El volumen de una esfera $= \frac{4}{3}\pi r^3$ Para encontrar el volumen de una esfera con un radio dado, sustituimos la variable en la fórmula y calculamos.

Ejemplo:



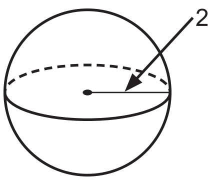
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \approx$$

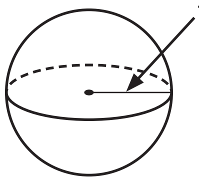
$$\approx \frac{4}{3}(3{,}14)(5)^3 \approx$$ ← Usamos 3,14 como valor de π.

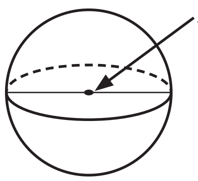
$$\approx \frac{4}{3}(3{,}14)(125) \approx$$

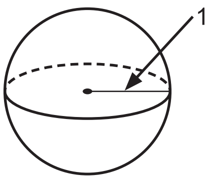
$\approx 523{,}3$ El volumen de la esfera es de unos 523,3 cm^3.

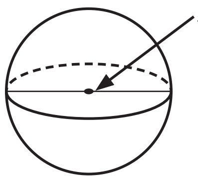
2. Encuentra el volumen de una esfera con las dimensiones indicadas. Redondea a las décimas.

a) 

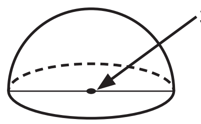
b) 

c) 

d) 

e) 

Extra ▶ Un hemisferio es la mitad de una esfera.



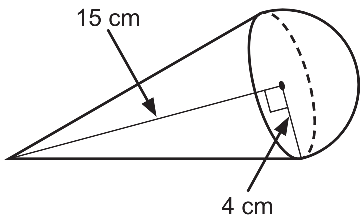
3. a) Una pelota de fútbol inflada tiene un diámetro de 22 cm. ¿Qué volumen de aire hay dentro de la pelota?

b) Para inflar la pelota, Katia ha accionado 9 veces un inflador. ¿Cuánto aire ha añadido cada vez?

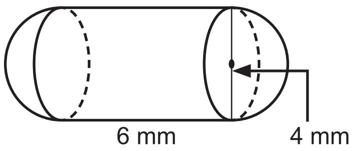
c) La pelota tiene una grieta y el aire se escapa a un ritmo de 25 cm^3 por hora. ¿Dentro de cuántas horas la pelota contendrá la mitad del aire?

4. Encuentra el volumen de los siguientes cuerpos geométricos compuestos.

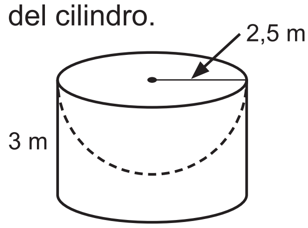
a)



b)



c) Un hemisferio se extrae del cilindro.

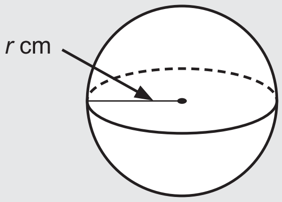


5. Una pelota de golf tiene un diámetro de 1,7 pulgadas. Una docena de pelotas de golf se empaquetan en una caja que mide 7,3 pulgadas por 5,5 pulgadas por 1,9 pulgadas. ¿Cuánto espacio queda alrededor de las pelotas de golf?

Dado el volumen (V), se puede encontrar el radio (r) de una esfera.

Ejemplo:

$V \approx 267{,}9$ cm^3



$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$267{,}9 \approx \frac{4}{3}(3{,}14)r^3$$

$$267{,}9 \approx 4{,}2r^3$$

$$267{,}9 : 4{,}2 \approx r^3$$

$$63{,}8 \approx r^3$$

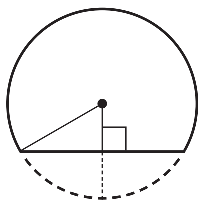
$\sqrt[3]{63{,}8} \approx r \longleftarrow$ Usamos la tecla $\boxed{\sqrt[3]{x}}$ de la calculadora.

$4 \approx r$ El radio de la esfera es de unos 4 cm.

6. Encuentra el radio de una esfera con el volumen indicado.

a) $V \approx 2.143{,}6$ mm^3 b) $V \approx 65{,}4$ cm^3 c) $V \approx 492{,}6$ m^3

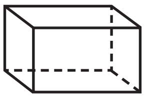
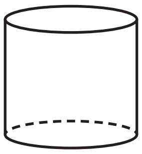
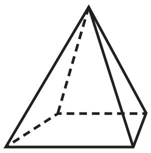
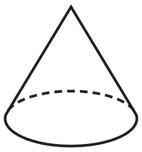
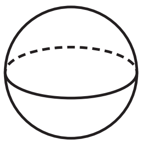
7. El volumen de una pelota de gimnasia es de aproximadamente 14.130 cm^3. ¿Cuál es su diámetro?



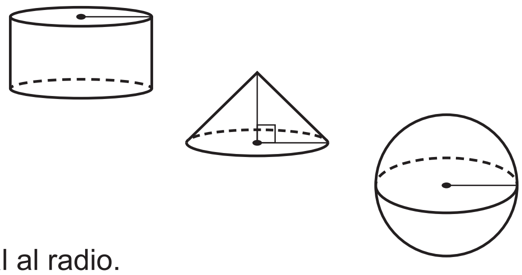
8. Una esfera tiene un radio de 5 cm. Francisco corta 2 cm en la base para que se apoye en una cara plana. ¿Cuál es el radio de la base de la figura recortada? Pista: Indica las medidas dadas en la sección transversal de la esfera.

G8-55 Problemas de volúmenes

1. Completa la tabla.

	Figura 3D	Nombre figura 3D	Dos ejemplos cotidianos	Fórmula del volumen
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				

2. a) Un cilindro, un cono y una esfera tienen un radio de 1 cm. El cilindro y el cono tienen una altura igual al radio. Formula una expresión con el símbolo π para el volumen de cada figura.



i) Volumen del cilindro = ______________________

ii) Volumen del cono = ______________________

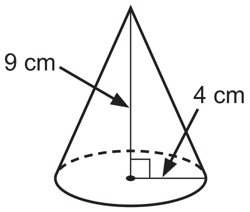
iii) Volumen de la esfera = ______________________

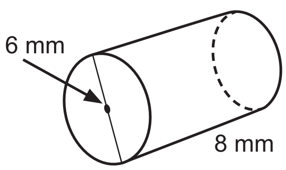
b) Un cilindro tiene un volumen de 372 cm^3. Su altura es igual al radio.

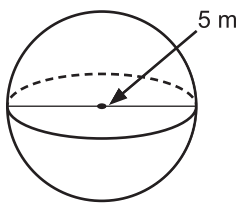
i) Un cono tiene el mismo radio y altura que el cilindro. ¿Cuál es el volumen del cono?

ii) Una esfera tiene el mismo radio que el cilindro. ¿Cuál es el volumen de la esfera?

3. Encuentra el volumen de las siguientes figuras. Redondea a las décimas. Usa 3,14 como valor de π.

a) 

b) 

c) 

4. Completa las siguientes afirmaciones. Escribe *dos*, *cuatro* u *ocho*.

a) Cuando se duplican las dimensiones de un prisma rectangular, su volumen se multiplica por ___________.

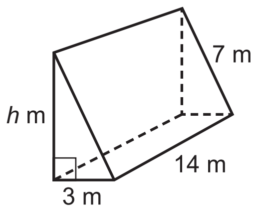
b) Cuando se duplica la altura de una pirámide, su volumen se multiplica por ___________.

c) Cuando se duplica el radio de un cilindro, su volumen se multiplica por ___________.

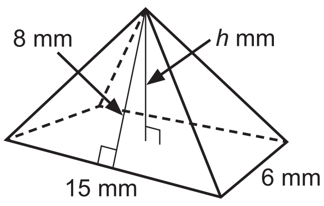
d) Cuando se duplica el radio de una esfera, su volumen se multiplica por ___________.

5. Encuentra *h* usando el teorema de Pitágoras. Después, calcula el volumen. Redondea a las décimas.

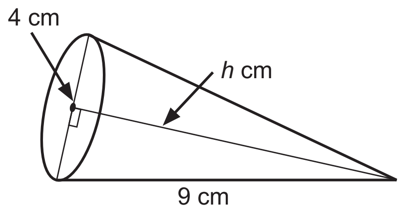
a)



b)

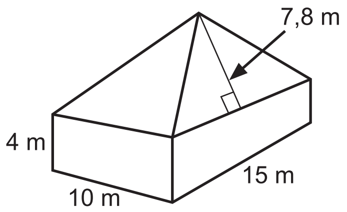


c)

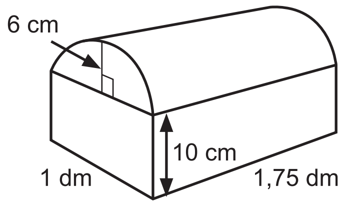


6. Encuentra el volumen de los siguientes cuerpos geométricos compuestos. Redondea a las décimas.

a)

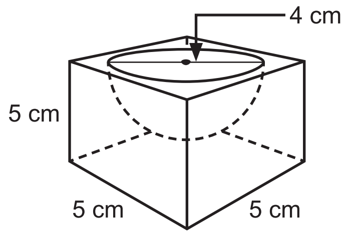


b)



Pista: 1 dm = 12 cm

c)



Pista: El hemisferio se extrae del prisma.

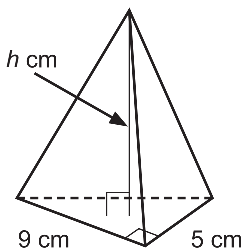
7. Dibuja e indica las dimensiones de tres figuras, todas con un volumen de 300 cm^3.

8. a) El diámetro de un chicle de bola mide 1 pulgada. Mario tiene una expendedora de chicles esférica con un diámetro de 8 pulgadas. Mario calcula el volumen de la expendedora y el de 1 chicle y divide para encontrar el número de chicles que caben en la expendedora. ¿Qué resultado obtiene?.

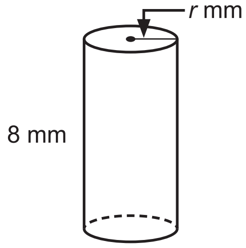
b) En la realidad, ¿el número de chicles de la expendedora es igual, mayor o menor que el resultado obtenido por Mario en *a*)? Justifica tu respuesta.

9. Plantea una ecuación y resuélvela para encontrar las medidas que faltan.

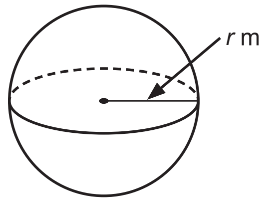
a) $V = 90$ cm^3



b) $V \approx 100{,}48$ mm^3



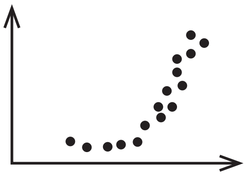
c) $V \approx 67{,}5$ m^3



SP8-4 Diagramas de dispersión de correlaciones lineales

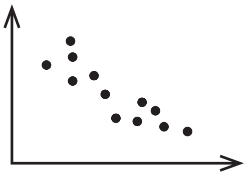
RECUERDA:

Si los valores de los dos conjuntos de datos aumentan a la vez, la correlación es positiva.



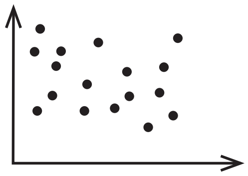
correlación positiva

Si los valores de un conjunto de datos aumentan a medida que disminuyen los del otro, la correlación es negativa.



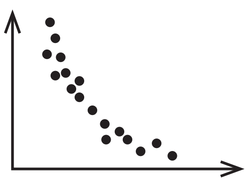
correlación negativa

Si la correlación no es ni positiva ni negativa, no hay correlación.

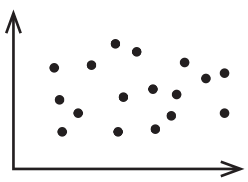


sin correlación

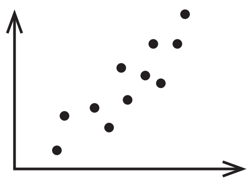
1. Indica el tipo de correlación representada en los diagramas de dispersión.

a) 

correlación negativa

b) 

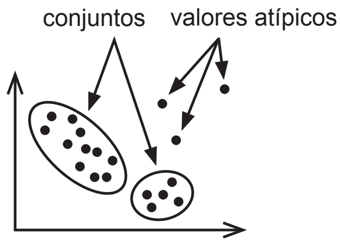
____

c) 

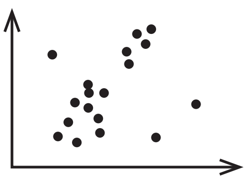
____

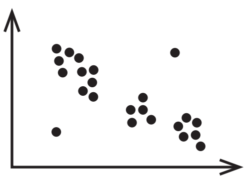
RECUERDA: Una nube es un grupo de puntos que están próximos los unos de los otros.

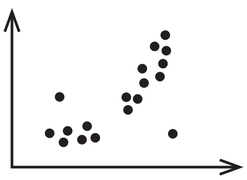
Un valor atípico es un punto que es muy diferente a los otros puntos del conjunto de datos. En los diagramas de dispersión, los valores atípicos están alejados del resto de puntos.



2. a) Rodea las nubes de puntos y marca con un aspa los valores atípicos.

i) 

ii) 

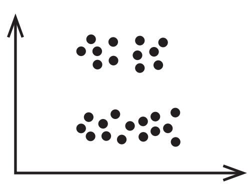
iii) 

b) ¿Qué tipo de correlación representan los diagramas de dispersión de *a*)?

i) ______________________ ii) ______________________ iii) ______________________

c) ¿Qué tipo de correlación representa el diagrama de dispersión de la derecha?

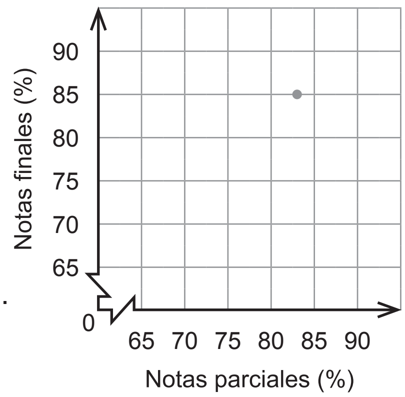
____



3. En la tabla se muestran las notas obtenidas por 15 alumnos en los exámenes parciales y finales.

Notas parciales (%)	83	68	72	85	68	69	84	87	67	70	72	81	79	71	72
Notas finales (%)	85	67	69	84	77	71	82	78	70	68	69	82	80	70	72

a) Escribe los datos como pares ordenados. Después, representa los datos en un diagrama de dispersión.



(*83* , *85*), (,), (,), (,), (,),

(,), (,), (,), (,), (,),

(,), (,), (,), (,), (,)

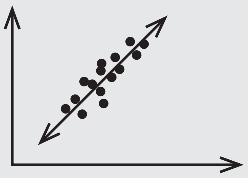
b) Rodea las nubes de puntos y marca con un aspa los valores atípicos.

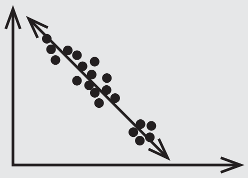
c) Entre las notas parciales y las finales, ¿la correlación es positiva, negativa o no hay correlación?

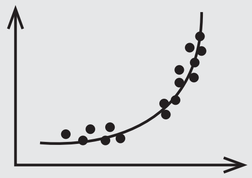
____

Si los datos representados en un diagrama de dispersión tienden a formar una recta, entre los dos conjuntos de datos existe una **correlación lineal**.

Ejemplos:

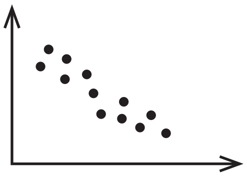

lineal


lineal


no lineal

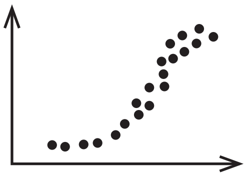
4. a) ¿Existe correlación? Si es así, indica si es positiva o negativa y si es lineal o no lineal.

i)



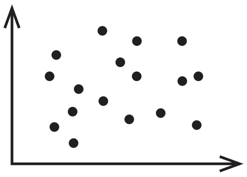
negativa, lineal

ii)



____

iii)

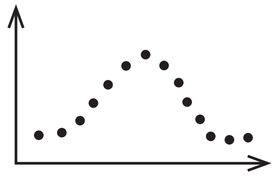


____

b) ¿Existe correlación en el diagrama de dispersión de la actividad *iii*)? ____________________

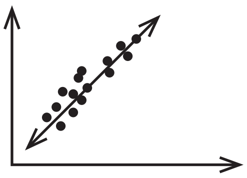
c) Si no existe correlación, ¿tiene sentido hablar de positiva o negativa, lineal o no lineal? _______________

d) Indica si la correlación del diagrama de dispersión de la derecha es lineal o no lineal. _______________

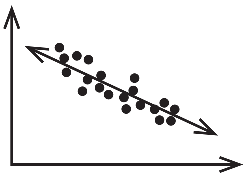


RECUERDA: En una gráfica, una recta o una curva son crecientes si van de la parte inferior izquierda a la parte superior derecha.
En una gráfica, una recta o una curva son decrecientes si van de la parte superior izquierda a la parte inferior derecha.

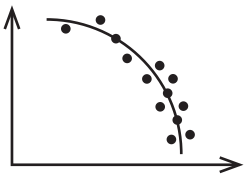
5. a) Indica el tipo de correlación.

i) 

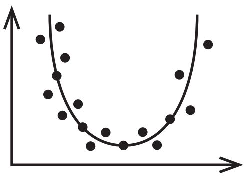
positiva, lineal

ii) 

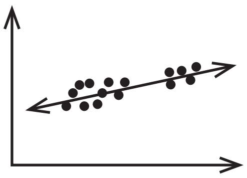
____

iii) 

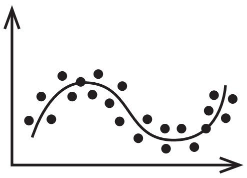
____

iv) 

____

v) 

____

vi) 

____

b) ¿Qué diagramas de dispersión de *a*) son lineales? ______________

c) ¿Qué rectas de *a*) son crecientes? _________

d) ¿Qué rectas de *a*) tienen una pendiente positiva? ____________

e) ¿Cómo puedes determinar a partir de la pendiente si una correlación es positiva o negativa?

____

____

6. En la tabla se muestra el uso semanal de Internet y las notas de matemáticas de 15 alumnos.

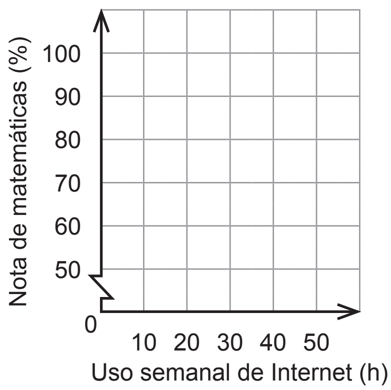
Uso semanal de Internet (h)	15	20	10	15	15	5	20	15	10	25	15	20	10	15	40
Nota de matemáticas (%)	75	72	84	70	60	82	74	76	75	69	70	73	79	81	73

a) Representa los datos en un diagrama de dispersión.

b) Marca los valores atípicos. ¿La gráfica muestra correlación entre las horas de uso de Internet y las notas de matemáticas? ______

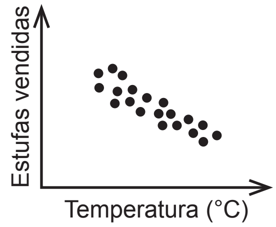
c) Si es así, ¿es positiva o negativa? __________________

¿Es lineal o no lineal? __________________



SP8-5 ¿Qué recta se ajusta más?

1. El diagrama de dispersión representa las temperaturas diarias en Temuco y el número de estufas vendidas.



a) ¿La correlación es positiva o negativa?

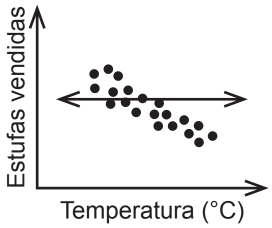
____

b) ¿La correlación es lineal o no lineal?

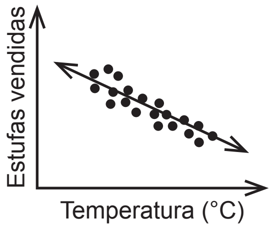
____

c) ¿Qué recta se ajusta mejor a la nube de puntos y representa mejor la correlación? ______

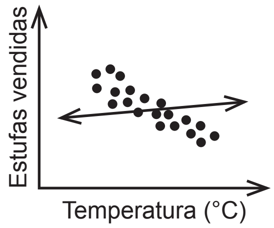
A.



B.



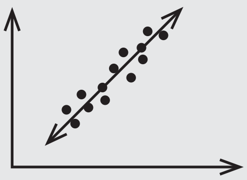
C.

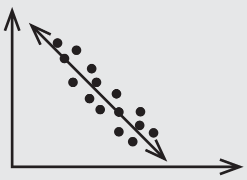


d) ¿Qué recta tiene una pendiente negativa? ______

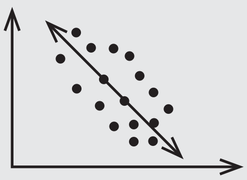
e) ¿Qué recta tiene una pendiente igual a 0? ______

En una **correlación lineal fuerte**, la nube de puntos describe una recta.


lineal fuerte

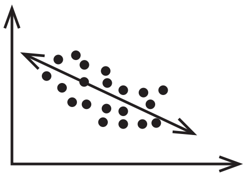

lineal fuerte


lineal débil

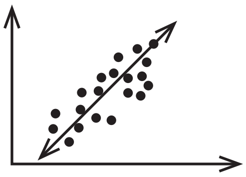

lineal débil

2. Las rectas de los siguientes diagramas de dispersión muestran el sentido general de los datos.

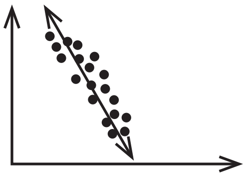
A.



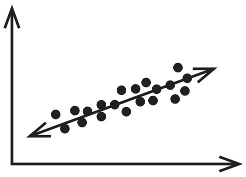
B.



C.



D.



a) ¿Qué correlaciones lineales son positivas? _______________

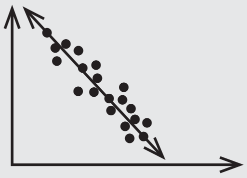
b) ¿Qué correlaciones lineales son negativas? _______________

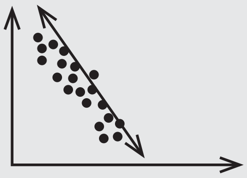
c) ¿Qué correlación lineal positiva es la más fuerte? ______

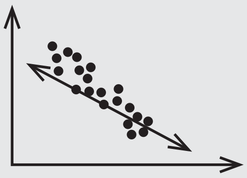
d) ¿Qué correlación lineal negativa es la más fuerte? ______

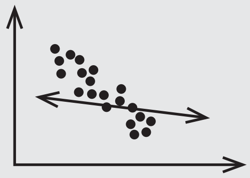
Una **recta de regresión** es la recta que atraviesa la nube de puntos y marca la **tendencia**. En los diagramas de dispersión, los puntos se agrupan alrededor de la recta de regresión.

Ejemplos:


Es una recta de regresión.


No es una recta de regresión.

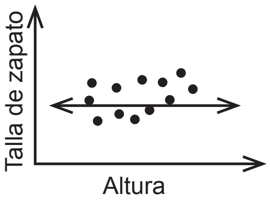

No es una recta de regresión.


No es una recta de regresión.

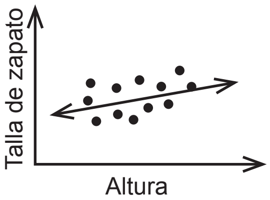
3. El diagrama de dispersión de la derecha representa la relación entre la altura de 12 alumnos y su talla de zapato.

a) ¿Qué recta atraviesa la nube de puntos? _________

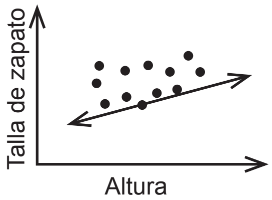
A.



B.



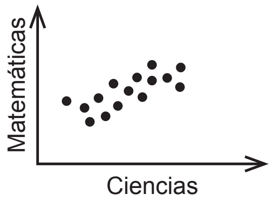
C.



b) ¿Qué rectas indican la tendencia de los datos? _________

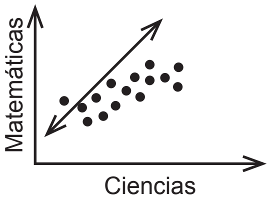
c) ¿Cuál es la recta de regresión? ______

4. El diagrama de dispersión de la derecha representa las notas de ciencias y de matemáticas de 15 alumnos.

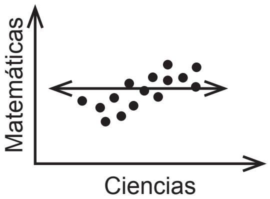


a) ¿Qué rectas indican la tendencia de los datos? _________

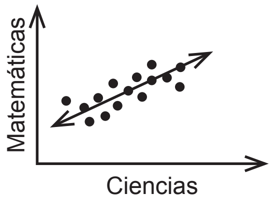
A.



B.



C.



b) Cuenta el número de puntos a cada lado de las rectas.

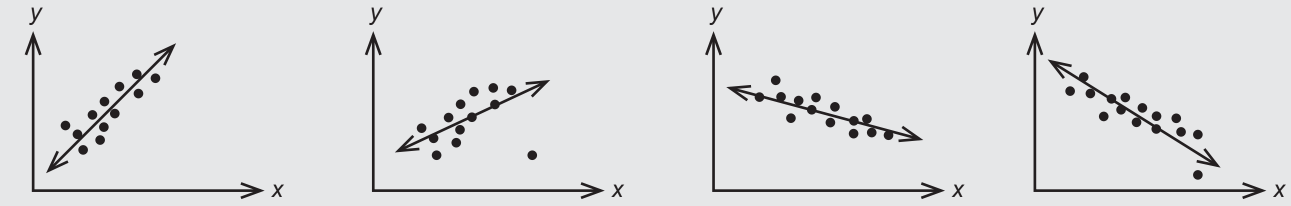
A. Puntos encima: *1*
Puntos debajo: *14*

B. Puntos encima: ______
Puntos debajo: ______

C. Puntos encima: ______
Puntos debajo: ______

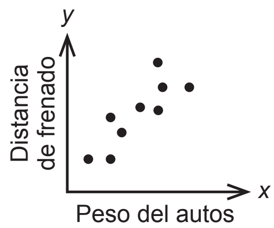
c) ¿Cuál es la recta de regresión? ______

Un valor atípico influye en la recta de regresión. Por ejemplo, si se añade un valor atípico con un valor *x* relativamente alto y un valor *y* relativamente bajo, la correlación se vuelve menos positiva o más negativa. La recta de regresión gira hacia la derecha.

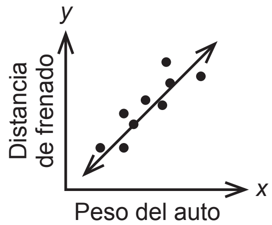


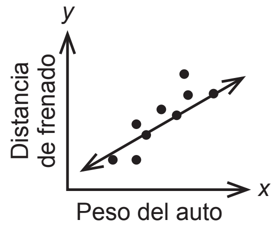
sin valor atípico | con valor atípico | sin valor atípico | con valor atípico

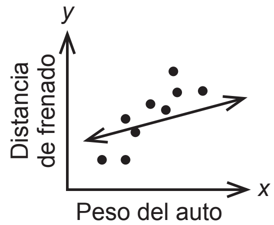
5. El diagrama de dispersión de la derecha representa la relación entre los pesos de 10 autos y las distancias de frenado necesarias para detenerse por completo.



a) ¿Cuál es la recta de regresión del diagrama de dispersión? ______

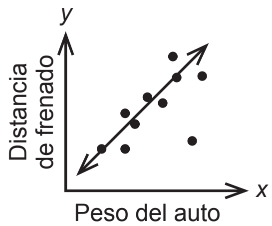
A.


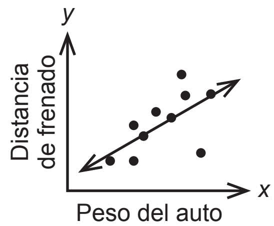
B.


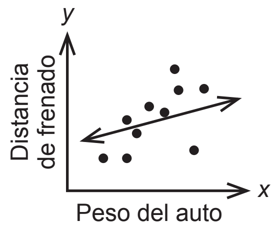
C.


b) A continuación se muestran los mismos diagramas de dispersión pero con un valor atípico.

¿Cuál es la recta de regresión del nuevo diagrama? ______

A.


B.


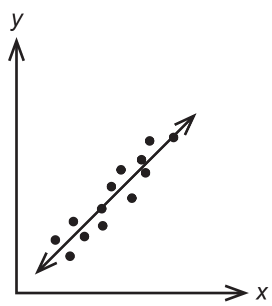
C.


c) ¿Influye el valor atípico en la recta de regresión? _________

6. a) La gráfica representa la recta de regresión de un conjunto de datos. ¿Hacia dónde gira la recta si añades un valor atípico con...

i) un valor *x* bajo y un valor *y* alto? __________________

ii) un valor *x* alto y un valor *y* bajo? __________________



b) Añade un punto alejado de los demás, pero situado sobre la recta de regresión.

¿Cambia la recta de regresión? _________

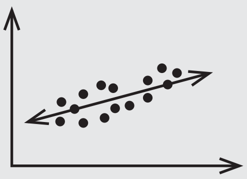
SP8-6 Recta de regresión

Para trazar la recta de regresión de un diagrama de dispersión:

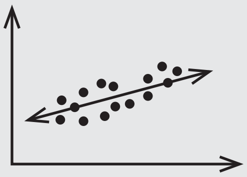
Paso 1: Observamos la tendencia que muestran los datos y determinamos el tipo de correlación.

correlación positiva

Paso 2: Trazamos una recta que atraviese la nube de puntos, comenzando por los valores más bajos y terminando por los más altos.

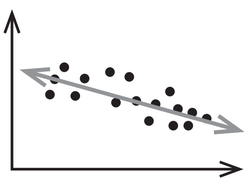


Paso 3: Comprobamos la recta trazada. Debe haber aproximadamente el mismo número de puntos a cada lado de la recta.



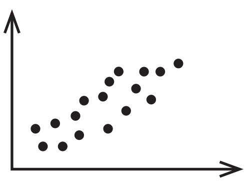
7 puntos encima de la recta
6 puntos debajo de la recta ✓

1. Traza la recta de regresión de los siguientes diagramas de dispersión. Cuenta el número de puntos a cada lado de la recta.

a) 

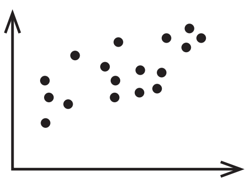
Puntos encima: *5*

Puntos debajo: *6*

b) 

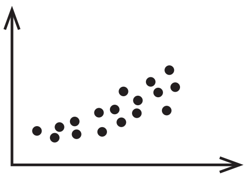
Puntos encima: ______

Puntos debajo: ______

c) 

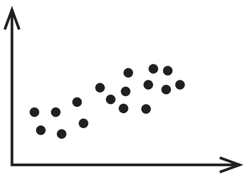
Puntos encima: ______

Puntos debajo: ______

d) 

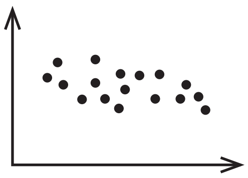
Puntos encima: ______

Puntos debajo: ______

e) 

Puntos encima: ______

Puntos debajo: ______

f) 

Puntos encima: ______

Puntos debajo: ______

2. En la tabla se muestra el número de medallas de oro obtenidas por atletas de Estados Unidos en los Juegos Olímpicos celebrados entre 1956 y 1968.

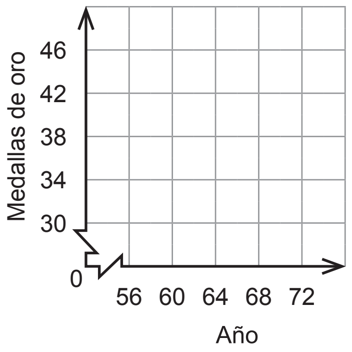
Año	1956	1960	1964	1968
Medallas de oro	32	34	36	45

a) Representa los datos en un diagrama de dispersión.

b) ¿La correlación es positiva o negativa? ____________________

c) Traza la recta de regresión del diagrama de dispersión.

Medallas olímpicas de oro por año EE. UU.



3. En la tabla se muestran los datos de 10 alumnos.

Altura (cm)	163	170	180	154	164	181	140	160	170	143
Longitud del pie (cm)	23	23	27	23	24	25	21	22	24	24

a) Representa los datos en un diagrama de dispersión.

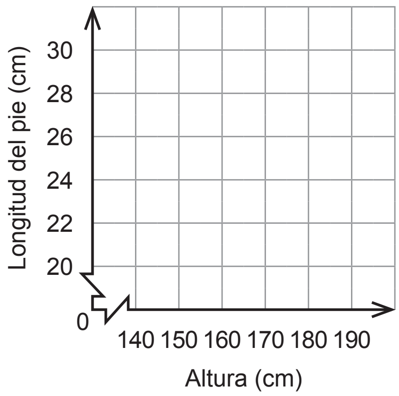
b) ¿La correlación es positiva o negativa? _______________

c) Traza la recta de regresión del diagrama de dispersión.

d) ¿Cuántos puntos hay encima de la recta? ______

e) ¿Cuántos puntos hay debajo de la recta? ______

Altura y longitud del pie



4. Jaime indaga sobre sus antepasados y anota estos datos:

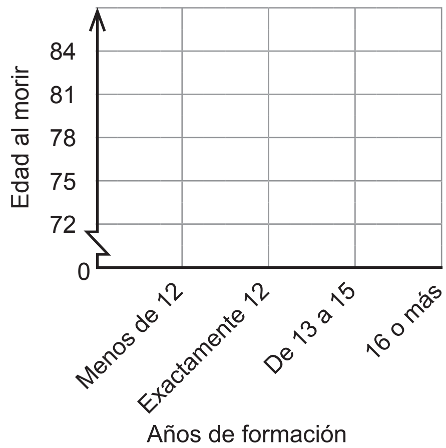
Años de formación	Menos de 12	Exactamente 12	De 13 a 15	16 o más
Edad al morir	74	78	83	84

a) Representa los datos en un diagrama de dispersión.

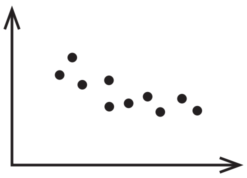
b) ¿La correlación es positiva o negativa? _______________

c) Traza la recta de regresión del diagrama.

Años de formación y edad al morir

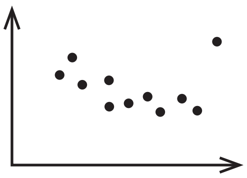


5. Rodea los valores atípicos de los diagramas de dispersión. Después, traza la recta de regresión del diagrama. Cuenta los puntos a cada lado de la recta.

a) 

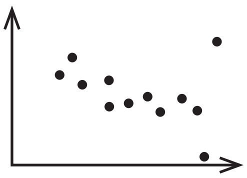
Puntos encima: ______

Puntos debajo: ______

b) 

Puntos encima: ______

Puntos debajo: ______

c) 

Puntos encima: ______

Puntos debajo: ______

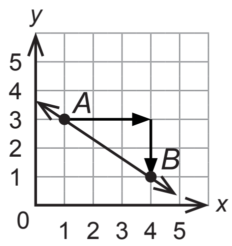
d) ¿Qué observas al comparar las rectas de regresión de *a*) y *c*)?

____

SP8-7 Ecuación de la recta de regresión

RECUERDA: La pendiente de una recta se puede encontrar a partir de dos puntos cualesquiera de la recta. Escogemos dos puntos. El punto de la izquierda se marca como *A* y el otro punto, como *B*. Encontramos la pendiente de *A* a *B* de modo que el desplazamiento horizontal sea positivo.

Ejemplo: *A* (1, 3) y *B* (4, 1).



desplaz. $x = 4 - 1 = +3$

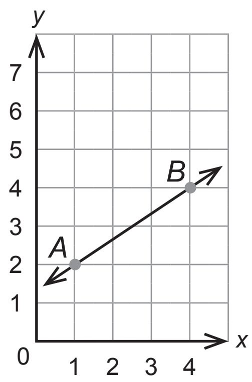
desplaz. $y = 1 - 3 = -2$

$$\frac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \frac{-2}{+3} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{pendiente} = -\frac{2}{3}$$

1. Marca dos puntos *A* y *B* en las rectas, siendo *A* el punto de la izquierda. Encuentra la pendiente. Pista: Si es posible, usa números enteros para las coordenadas.

a)

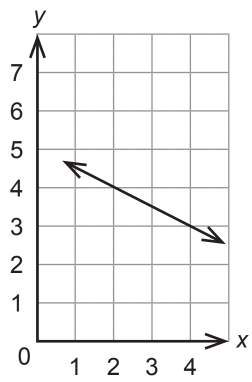


desplaz. $x =$ ______

desplaz. $y =$ ______

$$\text{pendiente} = \frac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \_\_\_$$

b)

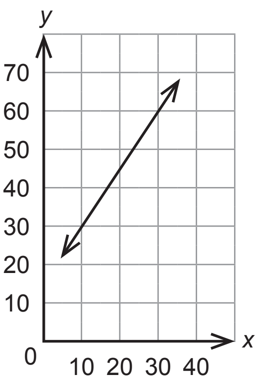


desplaz. $x =$ ______

desplaz. $y =$ ______

$$\text{pendiente} = \frac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \_\_\_$$

c)



desplaz. $x =$ ______

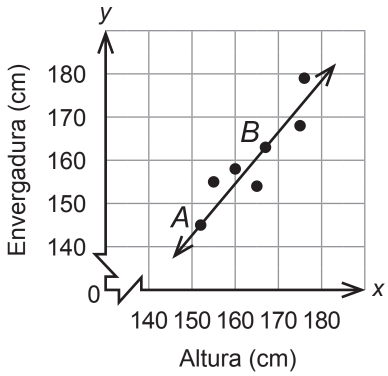
desplaz. $y =$ ______

$$\text{pendiente} = \frac{\text{desplaz. } y}{\text{desplaz. } x} = \_\_\_$$

2. En la tabla se muestran los datos de 7 alumnos.

Altura (cm)	165	152	176	175	167	155	160
Envergadura (cm)	154	145	179	168	163	156	158

Altura y envergadura



a) El diagrama de dispersión representa los datos de la tabla.

¿La correlación es positiva o negativa? ____________________

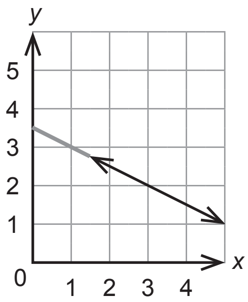
b) En la tabla, rodea con un círculo los puntos *A* y *B*.

c) Usa los puntos *A* y *B* para encontrar la pendiente de la recta de regresión.

RECUERDA: La intersección con el eje y es el punto en que la recta cruza el eje y. En la ecuación explícita de la recta, $y = mx + b$, m es la pendiente y b es la intersección con el eje y.

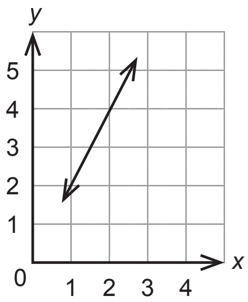
3. a) Alarga las rectas para encontrar la intersección con el eje y.

i)



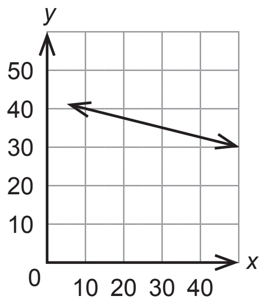
int. con el eje y: *3,5*

ii)



int. con el eje y: ______

iii)



int. con el eje y: ______

b) Marca dos puntos A y B en las rectas, siendo A el punto de la izquierda. Encuentra la pendiente.

c) Escribe la ecuación explícita de cada recta: $y = mx + b$.

Para encontrar la intersección con el eje y de una recta con pendiente $= \frac{3}{4}$ que pasa por el punto A (2, 5) usando el álgebra:

Paso 1: Escribimos la ecuación explícita de la recta y sustituimos la pendiente y las coordenadas del punto A dadas.

$$y = mx + b$$
$$5 = \frac{3}{4}(2) + b$$

Paso 2: Resolvemos la ecuación para encontrar b.

$$5 = \frac{3}{4}(2) + b$$
$$5 = \frac{3}{2} + b$$
$$b = 5 - \frac{3}{2} = 5 - 1{,}5 \text{; por tanto, } b = 3{,}5$$

4. Encuentra la intersección con el eje y de una recta con la pendiente indicada que pasa por el punto A.

a) pendiente $= 3$; A (1, 2)

$y = mx + b$

$2 = 3(1) + b$

$2 = 3 + b$

$b = -1$

b) pendiente $= -2$; A (1, 5)

c) pendiente $= 0{,}4$; A (1, 1)

d) pendiente $= \frac{1}{2}$; A (2, 1)

e) pendiente $= \frac{2}{3}$; A (5, 9)

f) pendiente $= -\frac{1}{2}$; A (2, 7)

5. Escribe la ecuación explícita de cada recta del ejercicio 4. Comprueba los resultados sustituyendo las coordenadas del punto *A*.

a) $y = 3x - 1$

$2 = 3(1) - 1$

$2 = 2$ ✓

b) $y =$

c) $y =$

d) $y =$

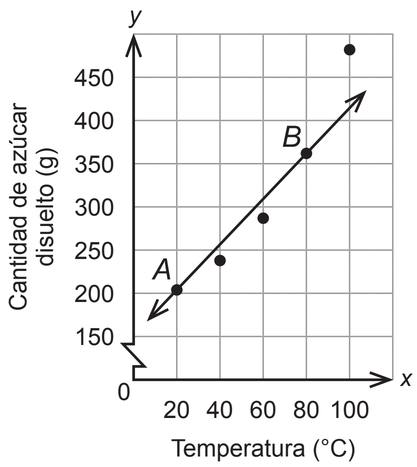
e) $y =$

f) $y =$

6. En la tabla se muestra la cantidad de azúcar que se disuelve en 100 gramos de agua a diferentes temperaturas.

Temperatura (°C)	20	40	60	80	100
Cantidad de azúcar disuelto (g)	204	238	287	362	482

Temperatura del agua y azúcar disuelto



a) ¿Hay correlación en el diagrama de dispersión de la derecha? _________

Si es así, ¿es positiva o negativa? __________________

b) Usa los puntos *A* (20, 204) y *B* (80, 362) para encontrar la pendiente de la recta de regresión.

c) Usa la pendiente y el punto *A* (20, 204) para calcular la intersección con el eje *y* de la recta de regresión.

d) La intersección con el eje *y* de la recta de regresión es la cantidad de azúcar que se disuelve en agua a ______°C. Escribe una ecuación explícita de la recta de regresión.

$y =$ __________________

e) Puedes disolver 179 gramos de azúcar en 100 gramos de agua a 0 °C.

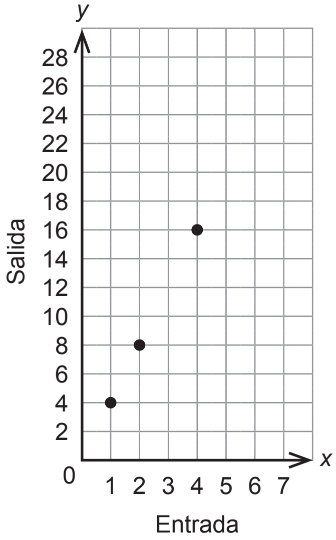
¿Cuánto se aleja tu deducción de *c*)? __*179*__ − _______ = _______

f) Añade el punto (0, 179) al diagrama de dispersión. ¿Los puntos representan una correlación lineal o no lineal? __________________

SP8-8 Aplicaciones de la recta de regresión

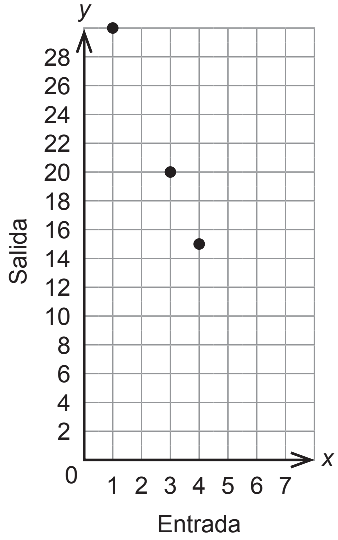
1. Las gráficas son lineales. Une los puntos con una recta para encontrar los valores que faltan en las tablas.

a)



Entrada	Salida
1	*4*
2	
	16
5,5	
7	

b)

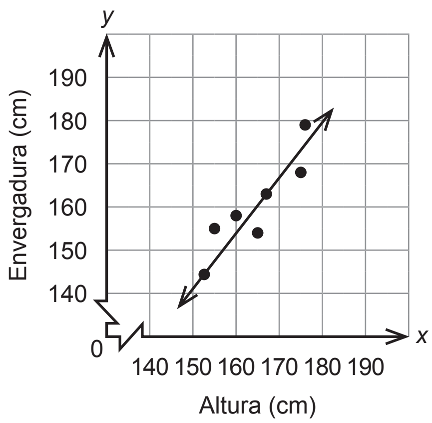


Entrada	Salida
1	*30*
	20
	15
	7,5
7	

Cuando entre dos variables hay una correlación lineal fuerte, usamos la recta de regresión y el valor de una variable para deducir el valor de la otra variable.

2. El diagrama de dispersión muestra los datos de 7 alumnos.

Altura y envergadura



a) Usa la recta de regresión para estimar...

i) la envergadura de un alumno que mida 170 cm de altura. ______

ii) la altura de un alumno con una envergadura de 170 cm. ______

b) Alarga la recta de regresión para deducir...

i) la envergadura de un alumno que mida 190 cm de altura. ______

ii) la altura de un alumno con una envergadura de 190 cm. ______

3. Encuentra el valor de y para cada valor de x.

a)

x	$y = 2x - 1$
1	*2(1) − 1 =* *= 1*
2	
1,5	
3,2	

b)

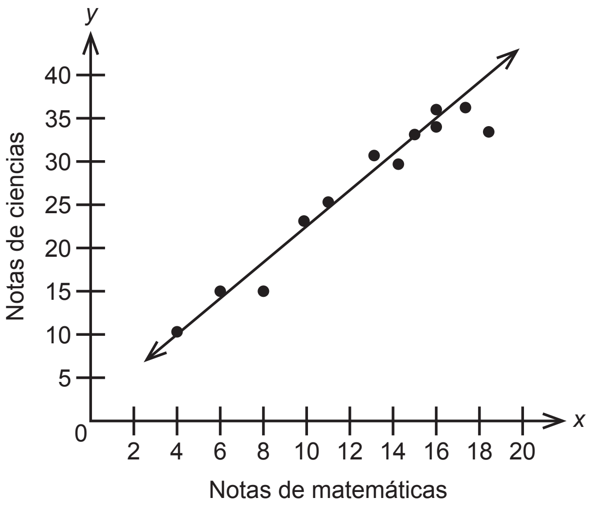
x	$y = 0{,}75x + 2$
1	*0,75(1) + 2 =* *= 2,75*
2	
1,5	
3,2	

c)

x	$y = -0{,}55x + 8{,}1$
1	*− 0,55(1) + 8,1 =* *= 7,55*
2	
1,5	
3,2	

4. Un examen de matemáticas se puntúa de 0 a 20 y un examen de ciencias se puntúa de 0 a 40. El diagrama de dispersión muestra las notas de 12 alumnos.

Notas de los alumnos



a) Determina la correlación entre las notas de

matemáticas y de ciencias. ___________________

b) La ecuación de la recta de regresión es $y = 2{,}09x + 0{,}82$, donde x es la nota de matemáticas e y es la nota de ciencias. Usa la ecuación para encontrar la nota de ciencias de un alumno que obtiene un 9 en matemáticas.

5. Resuelve la ecuación para encontrar el valor de x para cada valor de y.

a)

y	$\boldsymbol{y = 2x - 1}$
5	$5 = 2x - 1$ $6 = 2x$ $3 = x$
2	
1,5	

b)

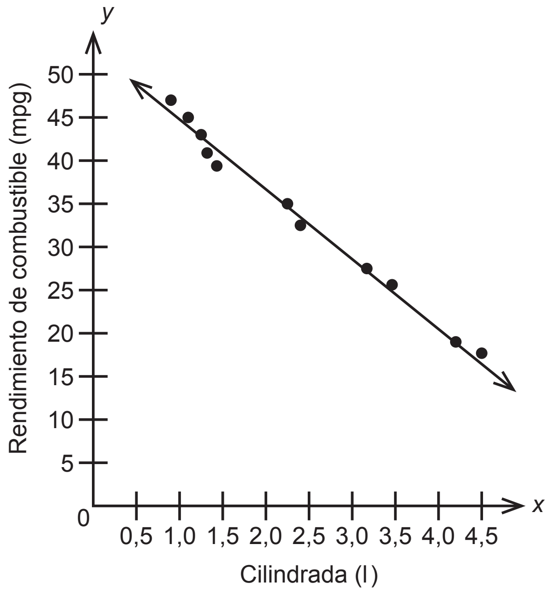
y	$\boldsymbol{y = 0{,}75x + 2}$
5	$5 = 0{,}75x + 2$ $3 = 0{,}75x$ $4 = x$
2	
1,5	

c)

y	$\boldsymbol{y = -0{,}55x + 8{,}1}$
5	$5 = -0{,}55x + 8{,}1$ $-3{,}1 = -0{,}55x$ $5{,}64 \approx x$
2	
1,5	

6. El diagrama de dispersión representa el consumo de combustible (millas por galón, mpg) de autos de diferentes cilindradas (descritas en litros, l). La ecuación de la recta de regresión es $y = -8{,}18x + 53{,}18$, donde x es la cilindrada e y es el consumo de combustible.

Cilindrada y consumo de combustible



a) Determina la correlación entre la cilindrada y el

rendimiento de combustible. _________________

b) Usa la ecuación de la recta de regresión para estimar el rendimiento de combustible de un auto con una cilindrada de 2,6 l.

c) Usa la ecuación para estimar la cilindrada de un auto con un consumo de combustible de 37 mpg.

7. a) En la gráfica de la derecha, ¿cuánto deduces que aumentará la nota de Natalia si estudia…

1 hora más? _________ ¿Qué lo indica

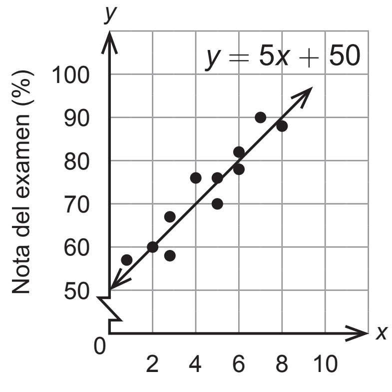
en la ecuación? ___________________________

b) ¿Qué nota deduces que obtendrá Natalia si no estudia

para el examen? _________ ¿Qué lo indica

en la ecuación? ___________________________

Tiempo de estudio y notas de los exámenes

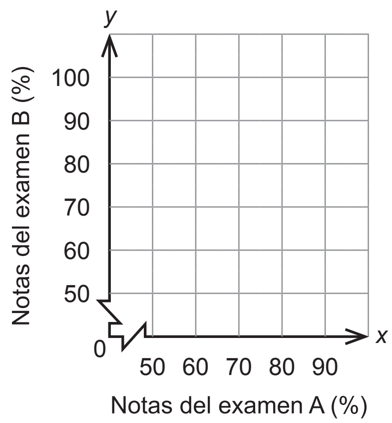


8. En la tabla se muestran las notas que obtienen 10 alumnos en dos exámenes.

Notas del examen A (%)	68	74	81	89	66	55	75	73	76	68
Notas del examen B (%)	71	69	85	84	68	62	77	73	79	74

a) Representa los datos en un diagrama de dispersión.

Notas de los alumnos



b) Determina el tipo de correlación. __________________

c) Traza la recta de regresión del diagrama de dispersión.

d) ¿Cuántos puntos hay encima de la recta? ______

e) ¿Cuántos puntos hay debajo de la recta? ______

f) Usa la recta de regresión para estimar...

i) la nota en el examen B de un alumno que obtuviese un 70% en el examen A. ______

ii) la nota en el examen A de un alumno que obtuviese un 82% en el examen B. ______

g) Alarga la recta de regresión y deduce...

i) la nota en el examen B de un alumno que obtuviese un 95% en el examen A. ______

ii) la nota en el examen A de un alumno que obtuviese un 90% en el examen A. ______

h) Usa dos puntos de la recta de regresión para encontrar la pendiente.

i) Usa la pendiente y un punto de la recta de regresión para encontrar la intersección con el eje *y*.

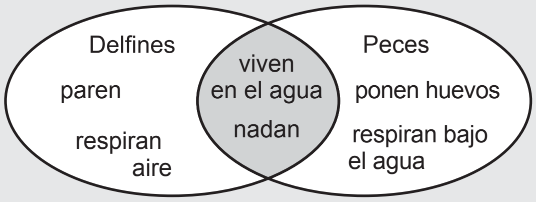
j) Escribe la ecuación explícita de la recta de regresión. $y =$ __________________

k) Usa la ecuación del ejercicio *j*) para calcular los resultados de *f*) y *g*).

SP8-9 Diagramas de Venn y tablas de doble entrada

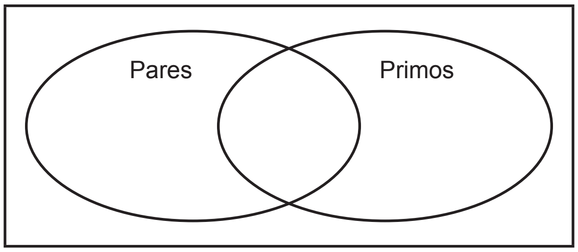
La información se puede organizar visualmente en categorías que tengan datos en común.

En los diagramas de Venn se usa un óvalo para cada categoría y se muestra si las categorías se solapan. Ejemplo: La información común entre delfines y peces aparece en la zona donde se solapan los óvalos.

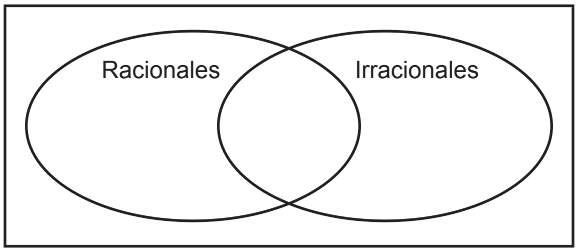


1. a) Organiza los siguientes números en los diagramas de Venn: 7, $\sqrt{2}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt[3]{16}$, 12, $5\frac{2}{3}$

i)



ii)

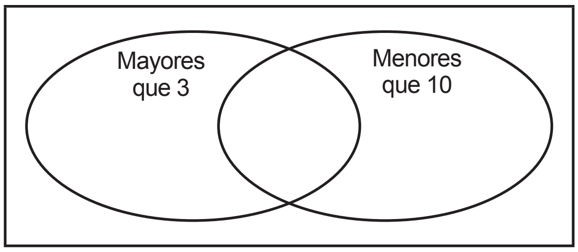


b) Sombrea las zonas vacías en los diagramas de Venn del ejercicio anterior.

c) ¿Puedes añadir un número en la zona común de la actividad *i*)? Justifica la respuesta.

d) ¿Puedes añadir un número en la zona común de la actividad *ii*)? Justifica la respuesta.

2. a) Organiza los siguientes números en el diagrama de Venn: $4\frac{2}{5}$; -3, 13; $\sqrt{75}$; $\frac{41}{4}$; $\sqrt{5}$; $\frac{25}{2}$; $\sqrt[3]{-8}$; $12,\widehat{1}$



b) Sombrea la zona vacía en el diagrama de Venn.

c) ¿Cuántos números son mayores que 3? ______

d) ¿Cuántos números son menores que 10? ______

e) ¿Cuántos números son mayores que 3 y menores que 10? ______

f) ¿Cuántos números son mayores que 3 y no son menores que 10? ______

g) ¿Cuántos números son menores que 10 y no son mayores que 3? ______

h) Completa la tabla con los números de *a*) y las respuestas de los ejercicios de *b*) a *g*).

	Menor que 10	No es menor que 10	**Total**
Mayor que 3			
No es mayor que 3			
Total			

En una **tabla de doble entrada** se muestran los datos de dos categorías diferentes. Normalmente, en la última fila y en la última columna de la tabla se indican los totales.

Ejemplo: A los alumnos de una clase se les pregunta si tienen bicicleta y si tienen patines.

En la tabla se muestra el número de alumnos en cada categoría.

	Tienen patines	No tienen patines	**Total**
Tienen bicicleta	7 (Tienen patines y bicicleta)	15 (Solo tienen bicicleta)	22
No tienen bicicleta	6 (Solo tienen patines)	2 (No tienen ni patines ni bicicleta)	8
Total	13 (Total con patines)	17 (Total sin patines)	**30** (Total alumnos preguntados)

3. Usa la tabla de doble entrada anterior para responder a las siguientes preguntas.

a) ¿Cuántos alumnos tienen bicicleta y patines? ______

b) ¿Cuántos alumnos tienen bicicleta, pero no patines? ______

c) ¿Cuántos alumnos tienen patines, pero no bicicleta? ______

d) ¿Cuántos alumnos no tienen ni bicicleta ni patines? ______

e) ¿Cuál es la suma de los alumnos con bicicleta y sin bicicleta? $22 + 8 = 30$

f) ¿Cuál es la suma de los alumnos con patines y sin patines? ________________

g) ¿A cuántos alumnos se les ha preguntado? ______

Extra ▶ ¿Cuántos alumnos tienen bicicleta o patines? ________________

En una **tabla de doble entrada horizontal**, hay una columna de totales pero no hay una fila de totales.

4. Completa las siguientes tablas de doble entrada y de doble entrada horizontal.

a)

	Tienen monopatín	No tienen monopatín	**Total**
Tienen moto	15	7	
No tienen moto		8	28
Total	35		

b)

	Tienen teléfono	No tienen teléfono	**Total**
Tienen televisor		20	73
No tienen televisor	12		
Total	65		100

c)

	Juegan a fútbol	No juegan a fútbol	**Total**
Juegan a tenis		8	19
No juegan a tenis	15		31

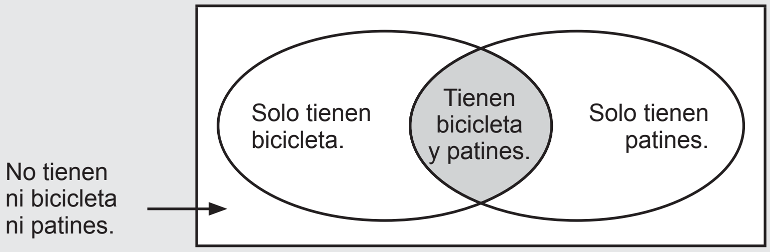
d)

	Viajan al extranjero	No viajan al extranjero	**Total**
Acampan	13		23
No acampan	7	19	

La información de una tabla de doble entrada se puede resumir en un diagrama de Venn.

Ejemplo: En el óvalo izquierdo se muestra el total de alumnos con bicicleta. En el óvalo derecho se muestra el total de alumnos con patines.

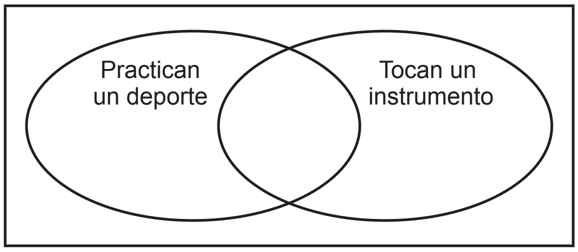
Muestra total



5. En la siguiente tabla de doble entrada se muestran los resultados de una encuesta realizada a 100 alumnos sobre su práctica musical o deportiva. Completa el diagrama de Venn usando la tabla de doble entrada. No olvides la información que no incluye ninguno de los dos óvalos.

	Tocan un instrumento	No tocan ningún instrumento	**Total**
Practican un deporte	9	56	65
No practican ningún deporte	15	20	35
Total	24	76	100

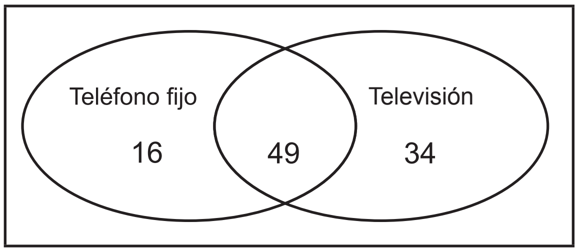
100 alumnos



6. Se ha realizado una encuesta en 100 hogares y se ha preguntado si disponen de televisión y teléfono fijo. Los resultados se muestran en el diagrama de Venn.

a) ¿En cuántos hogares...

100 hogares



i) hay solo teléfono fijo? *16*

ii) hay solo televisión? ______

iii) hay tanto teléfono fijo como televisión? ______

iv) hay teléfono fijo? *16 + 49 = 65*

v) no hay teléfono fijo? *100 – 65 = 35*

vi) hay televisión? __________________

b) Completa la tabla de doble entrada con las respuestas de *a*).

	Tienen teléfono fijo	No tienen teléfono fijo	**Total**
Tienen televisión			
No tienen televisión	*16*		
Total	*65*	*35*	*100*

c) Usa la tabla para indicar en cuántos hogares no hay ni televisión ni teléfono fijo. ______

SP8-10 Tablas de frecuencias relativas de doble entrada

En una **tabla de frecuencias** se muestra cuántas veces se repite un valor en un conjunto. En una **tabla de frecuencias relativas** se muestra cuántas veces se repite cada valor expresado en forma de porcentaje.

Ejemplo: En la tabla se muestran la frecuencia y la frecuencia relativa de las letras de la palabra *Cincinnati*.

Letra	Frecuencia	Frecuencia relativa
C	2	20%
I	3	30%
N	3	30%
A	1	10%
T	1	10%

1. En una encuesta a 75 alumnos:

- A 23 alumnos les interesa el fútbol.
- A 14 alumnos les interesa el baloncesto.
- A 11 alumnos les interesa el balonmano.
- A 8 alumnos les interesa la natación.
- A 19 alumnos les interesan otros deportes.

Completa la tabla.

Deporte	Frecuencia	Frecuencia relativa
Fútbol	*23*	*23 : 75 ≈ 31%*
Baloncesto		
Balonmano		
Natación		
Otros		

2. La escala Fujita mejorada (o escala EF) se utiliza para medir la intensidad de los tornados en función de los daños que provocan. La clasificación va desde EF0, daños leves, a EF5, daños devastadores o destrucción total de edificios.

La tabla muestra la frecuencia (frec.) de tornados en Estados Unidos y Canadá en 2014.

a) Completa la tabla.

b) ¿En qué país hubo más tornados EF1? ___________________

c) ¿En qué país hubo una mayor frecuencia relativa de tornados EF1? __________

d) Los daños provocados por tornados EF0 y EF1 son de mínimos a moderados. ¿Es correcto decir que Canadá tiene una mayor frecuencia relativa de tornados con daños mínimos o moderados?

______ Justifica tu respuesta. ___________

____

____

Escala Fujita mejorada	Estados Unidos		Canadá	
	Frec.	Frec. relativa	Frec.	Frec. relativa
EF0	476	*54%*	12	*48%*
EF1	315		10	
EF2	70		3	
EF3	20		0	
EF4	7		0	
EF5	0		0	
Total	888		25	

Para crear una **tabla de frecuencias relativas de doble entrada**, dividimos cada valor de la tabla de doble entrada entre el tamaño total de la muestra.

Ejemplo:

Tabla de doble entrada

	Tienen patines	No tienen patines	**Total**
Tienen bicicleta	7	15	22
No tienen bicicleta	6	2	8
Total	13	17	30

Tabla de frecuencias relativas de doble entrada

	Tienen patines	No tienen patines	**Total**
Tienen bicicleta	$\frac{7}{30} \approx 23\%$	$\frac{15}{30} = 50\%$	$\frac{22}{30} \approx 73\%$
No tienen bicicleta	$\frac{6}{30} = 20\%$	$\frac{2}{30} \approx 7\%$	$\frac{8}{30} \approx 27\%$
Total	$\frac{13}{30} \approx 43\%$	$\frac{17}{30} \approx 57\%$	$\frac{30}{30} = 100\%$

(En esta tabla se indican los cálculos.)

3. Usa las tablas de doble entrada para completar las tablas de frecuencias relativas de doble entrada.

a)

	Tienen teléfono	No tienen teléfono	**Total**
Tienen televisión	32	5	37
No tienen televisión	11	2	13
Total	43	7	50

	Tienen teléfono	No tienen teléfono	**Total**
Tienen televisión	$\frac{32}{50} = 64\%$		
No tienen televisión			
Total			

b)

	Juegan a fútbol	No juegan a fútbol	**Total**
Juegan a tenis	17	11	28
No juegan a tenis	19	16	35
Total	36	27	63

	Juegan a fútbol	No juegan a fútbol	**Total**
Juegan a tenis			
No juegan a tenis			
Total			

4. Alicia realiza una encuesta a 50 alumnos de su colegio escogidos al azar sobre su afición a las películas de acción y de ciencia ficción. En la tabla se muestran los resultados.

a) Usa la tabla de doble entrada para completar la tabla de frecuencias relativas de doble entrada.

b) Basándote en la tabla de frecuencias relativas, ¿en qué grupo puedes encontrar más aficionados a la ciencia ficción: entre los alumnos aficionados a las películas de acción o entre los que no son aficionados a las películas de acción?

____

Justifica tu respuesta. ______________________________

	Ciencia ficción	No ciencia ficción	**Total**
Acción	19	7	26
No acción	8	16	24
Total	27	23	50

	Ciencia ficción	No ciencia ficción	**Total**
Acción			
No acción			
Total			

SP8-11 Interpretación de tablas de frecuencias relativas de doble entrada

1. En la siguiente tabla de frecuencias relativas de doble entrada horizontal se muestran los resultados de una encuesta.

	Han acampado	Nunca han acampado	**Total**
Viven en el campo	70%	30%	100%
Viven en la ciudad	40%	60%	100%

Carmen dice que el 70% de los encuestados que viven en el campo han acampado.
Miguel dice que el 70% de los encuestados que han hecho acampada viven en el campo.

¿Quién tiene razón, Carmen o Miguel? ____________________

2. a) Usa la tabla de doble entrada horizontal para completar la tabla de frecuencias relativas de doble entrada horizontal.

	Zurdos	Diestros	**Total**
Viven en el campo	32	268	300
Viven en la ciudad	53	447	500

	Zurdos	Diestros	**Total**
Viven en el campo	$\frac{32}{300} \approx 11\%$		100%
Viven en la ciudad			100%

b) ¿Quién es más probable que sea zurdo: alguien que vive en el campo, alguien que vive en la ciudad, o la probabilidad es similar? ______________________

c) Si el número de personas que viven en la ciudad aumenta, ¿estimas que el porcentaje de zurdos aumentará, decrecerá o se mantendrá? Justifica tu respuesta.

____

d) ¿Hay una correlación entre vivir en la ciudad y ser zurdo? ________

3. Karim encuesta a 119 alumnos al azar para encontrar correlaciones entre ser aficionado al fútbol y ser aficionado al hockey. En la tabla de doble entrada horizontal se muestran los resultados.

	Aficionados al fútbol	No aficionados al fútbol	**Total**
Aficionados al hockey	18	56	74
No aficionados al hockey	11	34	45

a) Usa la tabla de doble entrada horizontal para completar la tabla de frecuencias relativas de doble entrada horizontal.

	Aficionados al fútbol	No aficionados al fútbol	**Total**
Aficionados al hockey			
No aficionados al hockey			

b) Basándote en la tabla de frecuencias relativas horizontal, ¿puedes afirmar que los aficionados al hockey tienen más probabilidad de ser aficionados al fútbol que los no aficionados al hockey?

______ Justifica tu respuesta. ____

Si las frecuencias relativas no varían dentro de una misma fila o columna, podemos afirmar que no hay correlación entre las dos variables. Ejemplos:

	Tienen bicicleta	No tienen bicicleta	**Total**
9 años	70%	30%	100%
13 años	71%	29%	100%

Según los datos, no hay correlación entre tener bicicleta y la edad.

	Leen novelas	No leen novelas	**Total**
9 años	12%	88%	100%
13 años	23%	77%	100%

Según los datos, hay una correlación positiva entre leer novelas y la edad.

4. a) Completa la tabla de frecuencias relativas de doble entrada horizontal correspondiente a la tabla de doble entrada.

	Han montado a caballo	No han montado a caballo
Viven en el campo	25	75
Viven en la ciudad	30	275

	Han montado a caballo	No han montado a caballo	**Total**
Viven en el campo	$\frac{25}{100} = 25\%$		100%
Viven en la ciudad			100%

b) ¿Quién es más probable que haya montado a caballo: alguien que vive en el campo

o alguien que vive en la ciudad? ___________________

c) Si el número de personas que viven en la ciudad aumenta, ¿estimas que el porcentaje de personas que han montado a caballo aumenta, decrece o se mantiene?

___________________ Justifica tu respuesta. ____

____

____

d) ¿Hay alguna correlación entre vivir en la ciudad y haber montado a caballo? ______

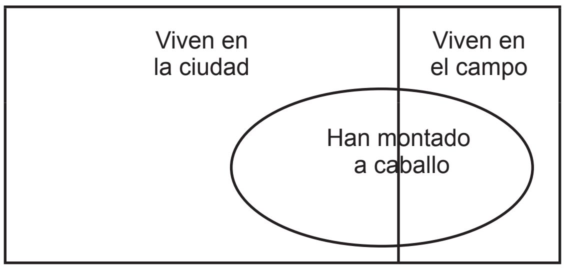
Si es así, ¿es una correlación positiva o negativa? ____________________

e) Completa el diagrama de Venn usando la tabla de doble entrada.

f) ¿Cuántas personas son encuestadas en total? ______

g) ¿Cómo puedes responder el ejercicio *a*) usando el diagrama de Venn?

____



5. En la tabla de doble entrada horizontal se muestran los resultados de una encuesta a alumnos de 6.º básico y 8.º básico sobre sus lecturas.

	Novelas	Cómics	Otros	**Total**
6.º básico	7	24	8	39
8.º básico	21	17	19	57

a) Completa la tabla de frecuencias relativas de doble entrada correspondiente a la tabla de doble entrada.

	Novelas	Cómics	Otros	**Total**
6.º básico				
8.º básico				

b) Basándote en la tabla de frecuencias relativas...

i) de 6.º a 8.ºbásico, la tasa de lectura

de __________________ decrece.

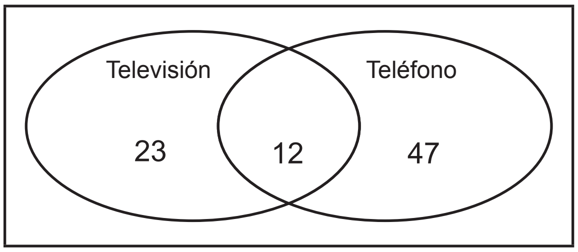
ii) de 6.º a 8.º básico, la tasa de lectura de __________________ aumenta.

iii) A medida que los alumnos se hacen mayores, ¿aumenta la variedad de libros que leen? ______

6. En el diagrama de Venn se muestran los resultados de una encuesta realizada en 100 hogares sobre la disponibilidad de televisión y teléfono fijo.

a) Completa la tabla de doble entrada horizontal y la tabla de frecuencias relativas de doble entrada horizontal usando el diagrama de Venn.

100 hogares



	Tienen teléfono	No tienen teléfono	**Total**
Tienen televisión	*47*		*70*
No tienen televisión			

	Tienen teléfono	No tienen teléfono	**Total**
Tienen televisión			
No tienen televisión			

b) ¿Hay correlación entre disponer de teléfono fijo y disponer de televisión? ______

Si es así, ¿es una correlación positiva o negativa? __________________ Justifica tu respuesta.

____

c) Intercambia las filas y columnas de la tabla de doble entrada de *a*) y completa la tabla de frecuencias relativas de doble entrada horizontal.

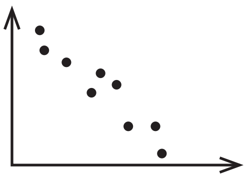
	Tienen televisión	No tienen televisión	**Total**
Tienen teléfono	*47*		*59*
No tienen teléfono			

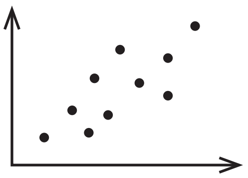
	Tienen televisión	No tienen televisión	**Total**
Tienen teléfono			
No tienen teléfono			

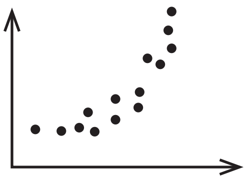
Extra ▶ ¿Puedes afirmar que es más probable que los hogares con teléfono fijo dispongan de televisión o que los hogares con televisión dispongan de teléfono fijo? Justifica tu respuesta.

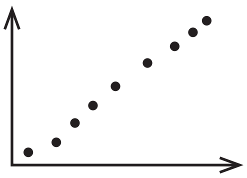
SP8-12 Repaso

1. Relaciona los diagramas de dispersión con las descripciones.

A. 

B. 

C. 

D. 

a) Correlación positiva _______________

b) Correlación negativa _______________

c) Correlación lineal _______________

d) Correlación no lineal _______________

e) Correlación lineal fuerte _______________

f) Correlación lineal débil _______________

2. Uno de los diagramas de dispersión del ejercicio 1 representa la correlación entre la distancia a la que un alumno vive del colegio y el tiempo que tarda en llegar. ¿De qué diagrama de dispersión se trata? Justifica tu respuesta.

____

____

3. Deduce la relación. Escribe *aumenta*, *decrece* o *se mantiene igual*.

a) Entre los 8 y los 18 años, a medida que la edad aumenta, la longitud del cabello ________________.

b) Entre los 8 y los 18 años, a medida que la edad aumenta, la envergadura __________________.

c) Entre los 8 y los 18 años, a medida que la edad aumenta, el número de juguetes ________________.

4. En la tabla se muestra el promedio de horas semanales que dedican 8 alumnos a practicar deporte y ver la televisión.

Practicar deporte (horas semanales)	9	15	12	2	10	4	4	7
Ver la televisión (horas semanales)	0	1	10	1	14	13	2	8

a) Usa la cuadrícula para dibujar un diagrama de dispersión que represente los datos. Recuerda incluir un título, leyendas en los ejes y una escala adecuada.

b) ¿Hay correlación entre el tiempo que dedican los alumnos a practicar deporte y el tiempo que dedican a ver la televisión? Justifica tu respuesta.

____

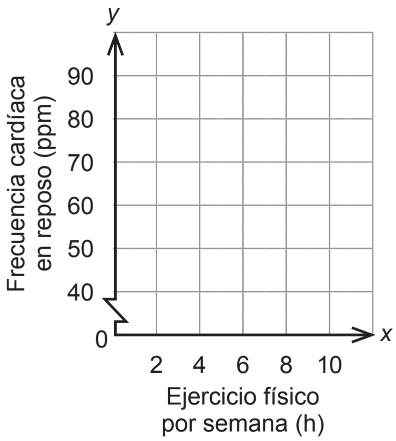
____

ESP_2ESO-2_LA_XILE_p176-200.indd 198 10/2/20 22:53

5. En la tabla se muestran las horas por semana de ejercicio físico y la frecuencia cardíaca en reposo (en pulsaciones por minuto, ppm) de 10 alumnos.

Ejercicio físico por semana (h)	4	2	1	3	2	7	4	9	6	1
Frecuencia cardíaca en reposo (ppm)	69	75	83	70	68	60	65	54	57	79

a) Representa los datos en un diagrama de dispersión.



b) ¿Hay una correlación positiva, una correlación negativa o no hay correlación entre el tiempo dedicado al ejercicio físico

y la frecuencia cardíaca en reposo? ______________________

c) Traza la recta de regresión correspondiente al diagrama de dispersión.

d) ¿Cuántos puntos hay encima de la recta? ______

e) ¿Cuántos puntos hay debajo de la recta? ______

f) Usa la gráfica para estimar...

i) la frecuencia cardíaca en reposo de un alumno que practica ejercicio 5 horas por semana. ______

ii) las horas de ejercicio por semana de un alumno con una frecuencia cardíaca en reposo de 72. ______

g) Alarga la recta de regresión y deduce...

i) la frecuencia cardíaca en reposo de un alumno que no practica ejercicio. ______

ii) la frecuencia cardíaca en reposo de un alumno que practica ejercicio 10 horas por semana. ______

h) Usa dos puntos de la recta para encontrar la pendiente de la recta de regresión.

i) Encuentra la intersección con el eje *y* de la recta de regresión.

j) Escribe la ecuación explícita de la recta de regresión. $y =$ __________________

k) Usa la ecuación de la recta para calcular los resultados de los ejercicios *f*) y *g*).

6. a) Completa las siguientes tablas de doble entrada.

i)

	Van de excursión	No van de excursión	**Total**
Van a nadar	19	13	
No van a nadar		7	23
Total	35		

ii)

	Tienen guitarra	No tienen guitarra	**Total**
Tienen batería		9	36
No tienen batería	25		
Total	52		69

iii)

	Aprobado	Suspendido	**Total**
Examen 1			23
Examen 2	28	6	
Total	41		

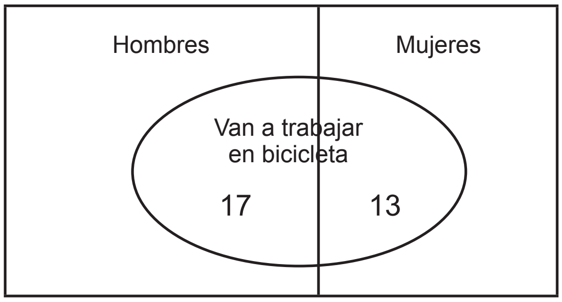
iv)

	Juegan básquetbol	No juegan básquetbol	**Total**
6.º básico	14		31
8.º básico		17	
Total			59

b) Construye una tabla de frecuencias relativas de doble entrada para cada tabla de *a*).

c) ¿Hay correlación entre las dos variables de cada tabla de frecuencias relativas de doble entrada de *b*)?

7. En el diagrama de Venn se muestran los resultados de una encuesta realizada a una muestra aleatoria de 43 hombres y 28 mujeres, a quienes se les preguntó si iban a trabajar en bicicleta o no.



a) ¿Cuántas mujeres van a trabajar en bicicleta? *13*

b) ¿Cuántas mujeres no van a trabajar en bicicleta? ______

c) ¿Cuántos hombres no van a trabajar en bicicleta? ______

d) Completa la tabla de doble entrada horizontal con las respuestas de *a*) a *c*).

	Van en bicicleta	No van en bicicleta	**Total**
Hombres			*43*
Mujeres	*13*		*28*

e) Completa la tabla de frecuencias relativas de doble entrada horizontal usando la tabla de doble entrada horizontal.

	Van en bicicleta	No van en bicicleta	**Total**
Hombres			*43*
Mujeres	$\frac{13}{28} \approx 46\%$		*28*

f) Samir dice que los hombres van a trabajar en bicicleta más que las mujeres porque hay 17 hombres que van a trabajar en bicicleta, y solo 13 mujeres. ¿Tiene razón? Justifica tu respuesta.

____

____